Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Ordem de Acurácia em Soluções Numéricas de Problemas Estacionários via Método de Diferenças Finitas Exponencial

Beatriz L. Carreira[1]
Leticia B. Berlandi[2]
Rafael L. Sterza[3]
Analice C. Brandi[4]
Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNESP, Presidente Prudente, SP

1 Introdução

Problemas estacionários podem ser representados por equações elípticas e equações desse tipo são difíceis de serem resolvidas analiticamente, devendo-se recorrer aos métodos numéricos. Recentemente, o método de diferenças finitas exponencial vem sendo estudado e aplicado na solução dessas equações, mostrando-se bastante eficiente. É comum que normas vetoriais sejam aplicadas em análises da ordem de acurácia do método numérico [1], que é o objetivo deste trabalho.

2 Formulação Matemática

Uma das principais equações elípticas que representam os problemas de equilíbrio é a equação de Poisson dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \tag{1}$$

numa região quadrada Ω com condição de contorno de Dirichlet $u(x,y) = g(x,y)$ em $\partial\Omega$.

3 Formulação Numérica

O método de diferenças finitas exponencial de quarta ordem é desenvolvido com base em Série de Taylor, Mac Lauren e expansão exponencial [3]. Sua equação é dada por

$$4(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1})+(u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1})-20u_{i,j} = 6h^2 f_{i,j} e^{\frac{h^2\nabla^2 f_{i,j}}{12 f_{i,j}}}, \tag{2}$$

[1] bia.liara36@hotmail.com
[2] leticiaberlandi@gmail.com
[3] rlsterza@gmail.com
[4] analice@fct.unesp.br

em que o laplaciano na equação (2) é aproximado por diferenças finitas de segunda ordem.

A diferença entre a solução analítica u de uma equação diferencial e sua solução numérica $\overline{u}$ é denominada erro numérico $E(\overline{u})$ [2]. A ordem de acurácia pode ser calculada através das ordens efetivas P_E. Para isso, consideram-se as soluções numéricas $\overline{u}_A$, $\overline{u}_B$ obtidas em duas malhas distintas, geradas com razão de refino constante r.

$$P_E = \frac{\log\left[\frac{E(\overline{u}_A)}{E(\overline{u}_B)}\right]}{\log(r)}. \tag{3}$$

4 Resultados Numéricos

Considerando a equação de Poisson bidimensional com $f(x, y) = x^2 + y^2$ e condição de contorno do tipo Dirichlet $u(x, y)$ em todos os lados unitários de um quadrado, tem-se a solução analítica dada por $u(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2$ e a norma $MAU = \max\limits_{1 \le i \le n} |u_i - \overline{u}_i|$ como forma de calcular o erro [3].

Tabela 1: Teste de verificação da ordem de acurácia para o método exponencial.

Malha	MAU	P_E
Grossa ($h = 0.25$)	5.1762e-05	–
Intermediária Grossa ($h = 0.125$)	3.5487e-06	3.8665
Intermediária Fina ($h = 0.0625$)	2.4106e-07	3.8798
Fina ($h = 0.03125$)	1.5640e-08	3.9461

5 Conclusões

De acordo com a Tabela 1 os valores da ordem de acurácia estiveram próximos de 4, confirmando que o método exponencial produz aproximações de quarta ordem e resultados coerentes.

Referências

[1] M. A. Martins, et al. Efeito do tipo de norma sobre a ordem de acurácia do erro de soluções numéricas em CFD. In *Anais do Congresso de Matemátca Aplicada e Computacional (CMAC)*, Bauru, São Paulo, Brasil, 2013.

[2] F. Oliveira. Efeito de malhas anisotrópicas bidimensionais sobre o desempenho do método multigrid geométrico, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, 2010.

[3] P. K. Pandey. A higher accuracy exponential finite difference method for the numerical solution of second order elliptic partial differential equations, *Journal of Mathematical and Computational Science*, 3:1325-1334, 2013. ISSN: 1927-5307.

