Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Runge-Kutta aplicado ao problema da camada-limite simplificado

Alex M. Sato[1]
Fabiano R. Neto[2]
Guilherme V. Montroni[3]
Gilcilene S. Paulo[4]
Faculdade de Ciências e Tecnologia - FCT, UNESP, Presidente Prudente, SP

1 Introdução

Como motivação à introdução aos estudos em Mecânica dos Fluidos Computacional, será utilizada uma técnica numérica para resolver o problema da camada limite "simplificado": o problema do escoamento laminar incompressível paralelo a uma placa em repouso. As equações que descrevem a camada limite para este tipo de escoamento, ao longo da direção-x, são dadas por

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

onde u e v se anulam sobre a placa e $u = u_\infty$ quando $y \to \infty$.

2 Desenvolvimento

Para resolver as equações (1) e (2), foi utilizada a técnica desenvolvida por H. Blasius, estudante de Prandtl. Esta técnica consiste em definir a função corrente ψ que satisfaça (2) tal que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{3}$$

Utilizando a seguinte mudança de variável

$$\psi(x,y) = \sqrt{u_\infty \nu x}\, f(\eta), \quad \text{onde} \quad \eta = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\, y \tag{4}$$

[1]alexsato1@hotmail.com
[2]fabianoruano@gmail.com
[3]gui_montroni@hotmail.com
[4]gilcilene@fct.unesp.br

© 2018 SBMAC

obtemos a EDO de terceira ordem

$$ff'' + 2f''' = 0 \tag{5}$$

sujeita às condições de contorno $f'(\eta = 0) = 0$, $f'(\eta \to \infty) = 1$ e $f(\eta = 0) = 0$.
Para resolver (5), reduzimos esta equação a um sistema de EDO's de primeira ordem, onde foi aplicado o método de Runge-Kutta de ordem 4.
Na tabela abaixo encontram-se os resultados obtidos numericamente.

Tabela 1: Perfil de velocidade exato na camada limite em uma superfície plana sem gradiente de pressão.

$y\sqrt{u_\infty/\nu x}$		u/u_∞				
η	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$	$f(\eta)^*$	$f'(\eta)^*$	$f''(\eta)^*$
0	0	0	0.3321	0	0	0.3320
0.20	0.0066	0.0664	0.3320	0.0066	0.0664	0.3319
0.40	0.0266	0.1328	0.3315	0.0265	0.1327	0.3314
0.60	0.0597	0.1989	0.3301	0.0597	0.1989	0.3300
0.80	0.1061	0.2647	0.3274	0.1061	0.2647	0.3273
1.00	0.1656	0.3298	0.3230	0.1655	0.3297	0.3230
2.00	0.6500	0.6298	0.2668	0.6500	0.6297	0.2667
3.00	1.3968	0.8460	0.1614	1.3968	0.8460	0.1613
4.00	2.3058	0.9555	0.0643	2.3057	0.9555	0.0642
6.00	4.2796	0.9990	0.0024	4.2796	0.9989	0.0024
8.00	6.2793	1.0000	0.0000	6.2792	1.0000	0.0000

* Valores extraídos da referência [3].

Referências

[1] R.L. Burden and J.D. Faires. *Análise numérica.* CENGAGE Learning, tradução da 8ª edição norte-americana, 2008.

[2] L. Howarth, On the solution of the laminar boundary layer equations, *The Royal Society*, 1938, DOI: 10.1098/rspa.1938.0037.

[3] J. H. V. Lienhard and J. H. VI Lienhard. *A heat transfer textbook.* Phlogiston Press, Cambridge, third edition, 2003.

[4] A. Quarteroni A, F. Salieri. *Cálculo Científico com MATLAB e Octave.* Springer, Milano, 2007.

[5] H. J. K. Schlichting. *Boundary-Layer Theory.* Mc.Graw-Hill, New York, seventh edition, 1979.

© 2018 SBMAC