Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Algumas Divergências Axiomáticas entre a Geometria Euclidiana e a Esférica

Humberto Tomé[1]
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP
Angela Leite Moreno[2]
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG

1 Introdução

O Axioma das Paralelas é comumente apontado como sendo o marco na geometria axiomática para a diferenciação da Geometria Euclidiana das Geometrias Não Euclidianas [1]. Porém na tentativa de se reconstruir a Geometria Esférica com a Axiomática de Hilbert, algumas preposições não se mostraram válidas antes de se considerar o Axioma de Riemann [2]. Abordaremos os Axiomas da Medição de Segmentos, um dos grupos de axiomas propostos por Hilbert em seu trabalho de reorganizar a Geometria Euclidiana.

2 Geometria Euclidiana $\times$ Geometria Esférica

Axioma 1. *A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Sendo zero se e somente se os pontos coincidirem.*

Definição 2.1. *O número relativo ao par de pontos a que se refere o Axioma 1 recebe o nome de* ***distância dos pontos*** *ou* ***comprimento do segmento****.*

Axioma 2. *Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta qualquer e os números reais, de modo que através do módulo da diferença entre os números definimos a distância entre os pontos correspondentes.*

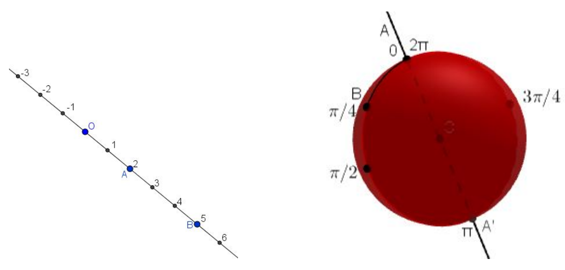

Figura 1: Medição de segmentos nas geometrias Euclidiana e Esférica, respectivamente.

[1]h1bts@yahoo.com.br
[2]aleitemoreno@gmail.com

Como Axioma 2 trata da medição de segmentos, com ele podemos relacionar, biunívocamente, pontos quaisquer de uma reta a uma régua infinita, que é a reta dos números reais. Aos números relacionados a cada ponto da reta referimos como coordenada do ponto. Porém, se tratando de uma reta esférica, como esta é um círculo, uma correspondência só faz sentido se percorremos um determinado ponto mais de uma vez, e assim a correspondência deixa de ser biunívoca.

Portanto, devido ao fato do comprimento de uma circunferência, ser a maior distância percorrida sobre uma reta de modo que não percorramos mais de uma vez um mesmo local da esfera, este axioma foi alterado para:

Axioma 3. *Consideremos o intervalo* $[0, 2\pi)$ *no caso da esfera unitária. Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta esférica e um intervalo, de modo que o módulo da diferença entre os números defina a distância entre os pontos correspondentes.*

Proposição 2.1. *Se em uma semirreta* S_{AB} *um segmento* AC *está de modo que* $\overline{AC} < \overline{AB}$, *então o ponto* C *entá entre* A *e* B.

Teorema 1. *Sejam* A, B *e* C *pontos distintos de uma reta com as respectivas coordenadas* a, b *e* c. *Então o ponto* C *estará entre* A *e* B *se, e somente se, o número* c *estiver entre* a *e* b.

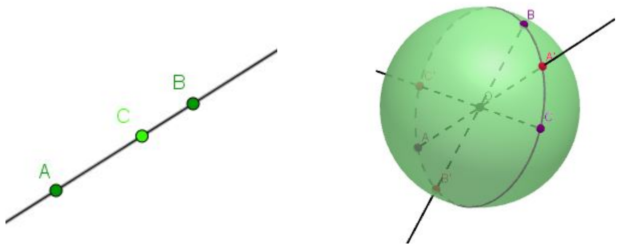

Figura 2: Ponto C entre os pontos A e B em ambas as geometrias.

Na Geometria Esférica, ao percorrermos uma circunferência de modo contínuo passamos por um mesmo ponto mais de uma vez como ilustrado na Figura 2. Assim, a Proposição 2.1 e o Teorema 1 não fazem sentido na Geometria Esférica pois é difícil definir na geometria Esférica quando um poto está entre outros devido à circularidade da reta esférica.

Diante de várias divergências, as discussões acima sinalizam uma necessidade de aprofundamento do estudo da construção da Geometria Esférica de modo axiomático, já que alguns resultados não se mostram válidos na Geometria Esférica.

Agradecimentos

Agradecemos à FAPEMIG e à Unicamp.

Referências

[1] E. Q. F. REZENDE, M. L. B. QUEIROZ. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas.* 2.ed. Editora da UNICAMP, Campinas, 2008.

[2] L. COUTINHO. *Convite às Geometrias não-euclidianas.* 2.ed. Interciência, Rio de Janeiro, 2001.

