Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Oscilador Harmônico Fracionário

Giovana Pereira Vizotto[1]
Departamento de Matemática, UNESP, Bauru, SP
Rubens de Figueiredo Camargo[2]
Departamento de Matemática, UNESP, Bauru, SP

1 Apresentação

Neste trabalho apresentamos a modelagem fracionária para o problema do oscilador harmônico. Verificou-se que a solução do oscilador harmônico simples, em sua versão fracionária, recupera o oscilador harmônico amortecido, porém com algumas vantagens.

2 Oscilador Harmônico

A equação diferencial associada a um Oscilador Harmônico, no caso de um sistema massa-mola é dada, a partir da Segunda Lei de Newton por

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) + c\frac{d}{dt}x(t) + kx(t) = g(t). \tag{1}$$

na qual, temos um corpo de massa m, no tempo t a partir da posição de equilíbrio, sujeito a uma força elástica, do tipo Hooke, $-kx(t)$, uma força de amortecimento $c\frac{d}{dt}x(t)$ e a uma força externa *g(t)*, onde c e k são constantes positivas. Vamos considerar um problema em que não há nenhuma força externa agindo sobre o sistema ($g(t) = 0$) e que não temos atrito , $\omega_0^2 = \sqrt{k/m}$ e com as condições iniciais $x(0) = 0$ e $x'(0) = v_0$ [1].

3 Oscilador Harmônico Fracionário

Como a derivada fracionária é definida por uma integral fracionária, para chegarmos à solução, precisamos integrar a equação (1), ficando desta forma:

$$x(t) = x(0) + tx'(0) - {\omega_0}^2 I^2[x(t)]. \tag{2}$$

Convertemos a ordem da derivada para trabalhar com o conceito da Integral Fracionária. Fazendo a substituição, temos:

[1]giovanavizotto@gmail.com
[2]rubens@fc.unesp.br

$$x(t) = x(0) + tv_0 - {\omega_0}^{\alpha} I^{\alpha}[x(t)]. \tag{3}$$

Antes de aplicar a Transformada de Laplace para encontrar a solução, é necessário lembrar que $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ após lembrar que

$$I^{\alpha} f(t) = \phi_{\alpha} * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau.$$

Desta forma, aplicamos a transformada de Laplace e com $v_0 = 0$, obtemos a seguinte solução:

$$x(t) = x_0 E_{\alpha}(-(\omega_0 t)^{\alpha}). \tag{4}$$

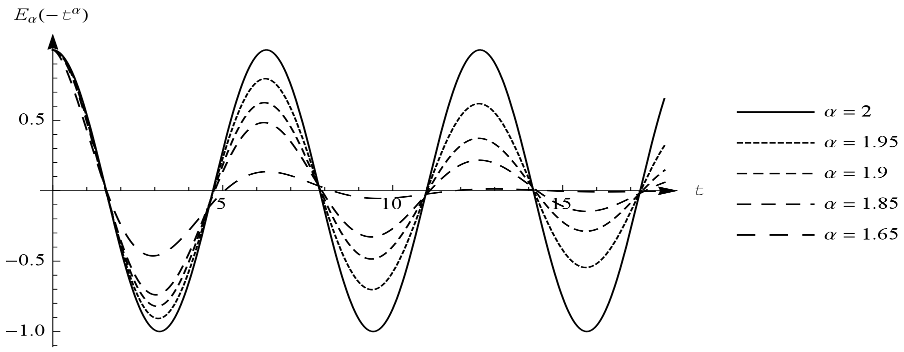

Figura 1: Gráfico do oscilador harmônico fracionário.

4 Conclusões

Neste caso, a modelagem fracionária conseguiu recuperar os diferentes tipos de atritos sem a necessidade de colocá-los na equação, somente a mudança na ordem da derivada. De fato o modelo é mais realista que o de ordem inteira, pois prevê uma diminuição na amplitude e também na frequência.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP (Processo - 2016/07703-5) por terem financiado essa pesquisa.

Referências

[1] R. F. Camargo, Cálculo Fracionário e Aplicações, Tese de doutorado, Unicamp, 2009.

[2] D. S. de Oliveira, Derivada Fracionária e as Funções de Mittag Leffler, Tese de mestrado, Unicamp, 2014.