Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicações do Teorema de Baire

Michele Martins Lopes[1]
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG
Angela Leite Moreno[2]
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG

1 Introdução e Teorema de Baire

Este trabalho apresenta alguns resultados importantes de Análise Funcional, com foco nas aplicações do Teorema de Baire. Primeiramente seguem algumas definições e resultados necessários, incluindo o Teorema de Baire, para que possamos utilizá-lo para demonstrar o Princípio da Limitação Uniforme, e encerramos com uma aplicação.

Definição 1.1 (Espaço de Banach)**.** *Diremos que X é um espaço de Banach se X for um espaço vetorial normado que é completo em relação à métrica induzida pela norma.*

Temos que todo espaço vetorial normado pode ser imerso em um espaço de Banach.

Definição 1.2 (Espaço Dual)**.** *Suponhamos que X seja um espaço vetorial normado $\mathbb{K}$. Então $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, que é o conjuntos das funções $f : X \to \mathbb{K}$ contínuas e lineares, é um espaço de Banach que é denominado de espaço dual de X, que é denotado por X^*.*

Definição 1.3 (Conjunto Nunca Denso)**.** *Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico. Diremos que um subconjunto A de X é nunca denso quando $\overset{\circ}{\bar{A}} = \varnothing$.*

Definição 1.4. *Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico e que A seja um subconjunto de X. Diremos que A é de 1^a Categoria em (X, ρ) quando A for uma união enumerável de conjuntos nunca densos. Diremos que A é de 2^a Categoria quando não for de 1^a categoria.*

Teorema 1.1 (Teorema de Baire)**.** *Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico completo. Se $\{A_n\}$ for uma família de conjuntos abertos e densos de (X, ρ) então $\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = X$.*

Corolário 1. *Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico completo. Então X será de 2^a categoria em X.*

Corolário 2. *Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico completo e que A seja um subconjunto fechado de X. Se A for de 1^a categoria em X então A será nunca denso.*

[1]mi_martins22@hotmail.com
[2]aleitemoreno@gmail.com

2 Aplicações do Teorema de Baire

Teorema 2.1 (Teorema de Banach-Steinhauss)**.** *Suponhamos que* $(X, \|\cdot\|)$ *e* $(Y, \|\cdot\|)$ *sejam espaços vetoriais normados e que* $T_\alpha \in \mathcal{L}(X,Y)$*, com* $\alpha \in \Omega$*. Se* $\{x \in X : \sup\{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\}$ *for de* 2^a *Categoria então* $\sup\{\|T_\alpha\| : \alpha \in \Omega\} < \infty$.

Teorema 2.2 (Teorema de Banach-Steinhauss (#2))**.** *Suponhamos que* X *seja um espaço de Banach, que* $(Y, \|\cdot\|)$ *seja um espaço vetorial normado e que* $T_\alpha \in \mathcal{L}(X,Y)$*, com* $\alpha \in \Omega$*. Se* $\sup\{\|T_\alpha\| : \alpha \in \Omega\} < \infty$ *então* $\{x \in X : \sup\{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\}$ *será de* 2^a *Categoria.*

Teorema 2.3 (Princípio da Limitação Uniforme)**.** *Suponhamos que* X *seja um espaço de Banach, que* $(Y, \|\cdot\|)$ *seja um espaço vetorial normado e que* $T_\alpha \in \mathcal{L}(X,Y)$*, com* $\alpha \in \Omega$*. Se* $\sup\{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty$ *então* $\sup\{\|T_\alpha\| : \alpha \in \Omega\} < \infty$.

Demonstração: Se mostrarmos que $\{\sup\{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\}$ é de 2ª categoria, pelo Teorema 2.1 provamos o que queremos. Como $\sup\{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty$, com $x \in X$, podemos dizer que

$$X = \{x \in X : \sup\{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\}.$$

X é completo e, assim, de 2ª categoria.

Portanto, $\{\sup\{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\}$ é de 2ª categoria. □

Como consequência temos que a seguinte aplicação:

Exemplo 1. *Suponhamos que* X *seja um espaço de Banach, que* $f \in X^*$ *e que* $B \subset X$*. Se* $f(B)$ *for limitado então* B *será limitado.*

Demonstração: Para cada $b \in b$ temos que

$$\begin{array}{cccc} T_b : & X^* & \to & K \\ & f & \mapsto & f(b) \end{array}$$

Assim temos que, para cada $T_b \in \mathcal{L}(X^*, K)$ que $\|T_b\| = \|b\|$. Além disso, para cada $f \in X^*$, temos que $\|T_b(f)\| = \|f(b)\|$. Assim

$$\sup\{\|T_b(f)\| : b \in B\} = \sup\{\|f(b)\| : b \in B\} < \infty$$

Segue, pelo Princípio da Limitação Uniforme que $\sup\{\|T_b\| : b \in B\} < \infty$ daí

$$\sup\{\|b\| : b \in B\} < \infty$$

Donde segue que B é limitado. □

Agradecimentos

Agradecemos à FAPEMIG e à UNIFAL-MG.

Referências

[1] C. Goffman, P.Pedrick *First Course in Functional Analysis*. Chelsea Publishin Company, New York, 1983.