Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Utilização do Determinante de uma Matriz para Determinar a Equação de uma Superfície Através de Pontos Arbitrários

Marcelo Nunes Silva[1]
Hedjany Sena da Silva[2]
Modesto Valci Moreira Lopes[3]
Ivan Mezzomo[4]
Matheus da Silva Menezes[5]
Fernando H. N. Amaral[6]
Centro de Ciências Exatas e Naturais, UFERSA, Mossoró, RN

Este trabalho tem como objetivo a utilização do determinante de uma matriz para a caracterização da equação de uma determinada figura geométrica através de um número pré-determinado de pontos dessa figura.

Uma equação linear é a equação do tipo $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = b$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são variáveis e b é o termo independente. Um conjunto finito de equações lineares forma um sistema de equações lineares [2]. Quando todos os termos independentes b_i com $i = 1, \ldots, m$ são todos nulos, dizemos que o sistema linear é homogêneo. Todo sistema linear homogêneo admite pelo menos uma solução, denominada solução trivial, quando todos os membros do conjunto solução são iguais a zero. Podemos associar um sistema linear a uma matriz de ordem $m \times n$ organizando os coeficientes das variáveis em uma matriz A, denominada matriz de coeficientes [2].

Teorema 1: [1, Teorema 11.1.1] Um sistema linear homogêneo com o mesmo número de equações e de incógnitas tem uma solução não-trivial se, e somente se, o determinante da matriz de coeficientes é zero.

Dessa forma, um lugar geométrico de dimensão n pode ser identificado a partir do cálculo do determinante do sistema de equações formado por sua equação geral, dado um número de pontos suficientes para caracterização da figura geométrica através do determinante da matriz dos coeficientes.

A equação própria de uma curva de grau dois pode ser identificada a partir de sua equação geral utilizando a solução do determinante associado à matriz de coeficientes de um sistema linear homogêneo. Este resultado evidencia as manifestações geométricas na solução de problemas típicos da álgebra linear. Dados cinco pontos distintos quaisquer $(x_1, y_1), \ldots, (x_5, y_5)$, existe uma única curva de equação $c_1x^2+c_2xy+c_3y^2+c_4x+c_5y+c_6=0$

[1]marcelonunes.genoa@gmail.com
[2]hedjany@icloud.com
[3]modsval@gmail.com
[4]imezzomo@ufersa.edu.br
[5]matheus@ufersa.edu.br
[6]fernandofhna@hotmail.com

que passa pelos cinco pontos simultaneamente. Tendo em vista que estes cinco pontos pertencem a curva arbitrária, podemos construir o seguinte sistema de equações lineares:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} c_1x^2 & + & c_2xy & + & c_3y^2 & + & c_4x & + & c_5y & + & c_6 & = & 0 \\ c_1x_1^2 & + & c_2x_1y_1 & + & c_3y_1^2 & + & c_4x_1 & + & c_5y_1 & + & c_6 & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & & & & & \\ c_1x_5^2 & + & c_2x_5y_5 & + & c_3y_5^2 & + & c_4x_5 & + & c_5y_5 & + & c_6 & = & 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

A única solução deste sistema que nos interessa é uma solução não-trivial. Assim, o cálculo do determinante nos informa a equação própria da curva que passa pelos cinco pontos especificados. Desta forma, a quantidade de pontos a ser considerado vai depender da equação da figura geométrica (grau e espaço) de forma que a matriz dos coeficientes seja quadrada, a partir de sua equação geral.

Exemplo 1: Considere os pontos em $\mathbb{R}^2$: $A(4,62;1,88), B(3,273;4,269), C(0,702;4,835), D(-1,922;3,607)$ e $E(-2,547;1,9)$. Queremos determinar uma equação de grau 2 que passa pelos 5 pontos, isto é, determinar a equação do tipo $c_1x^2+c_2xy+c_3y^2+c_4x+c_5y+c_6 = 0$, com c_1, c_2 e c_3 não nulos simultaneamente. Do sistema (1) temos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 21,344 & 8,685 & 3,534 & 4,620 & 1,880 & 1 \\ 10,712 & 13,972 & 18,224 & 3,273 & 4,269 & 1 \\ 0,493 & 3,394 & 23,377 & 0,702 & 4,835 & 1 \\ 3,694 & -6,933 & 13,010 & -1,922 & 3,607 & 1 \\ 6,487 & -4,839 & 3,610 & -2,547 & 1,900 & 1 \end{bmatrix}$$

Com o auxílio do MatLab no cálculo, temos que o determinante da matriz é $124,670x^2 + 206,25y^2 - 4,194xy - 250,71x - 845,171y - 606,365 = 0$, que é a equação de uma elípse com centro fora da origem, rodada para fora da posição padrão.

Exemplo 2: Considere os pontos em $\mathbb{R}^3$: $A(0;2,448;0), B(0;2;1), C(0;1,003;-1,578), D(0;0;-1,73), E(2,644;0;0), F(-2;0;1,133), G(1,996;1,606;0), H(0,496;-2,405;0)$ e $I(1,502;2,015;0)$. Para determinar uma equação de grau 2 que passa por todos os pontos teremos uma matriz quadrada de ordem 10, pois a equação geral é dada por $c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + c_4xy + c_5xz + c_6yz + c_7x + c_8y + c_9z + c_{10} = 0$. Calculando o determinante da matriz com auxílio do MatLab, temos $218,508x^2 + 255,021y^2 + 509,8z^2 - 0,25xy - 1,45xz + 0,113yz + 0,483x + 0,22y - 1,747z - 1528,804 = 0$, que é um elipsóide com uma pequena rotação em relação a posição padrão.

Referências

[1] H. Anton and C. Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações.* 8. Ed., Bookman, Porto Alegre, 2001.

[2] S. Leon. *Álgebra Linear com Aplicações.* 8. Ed., LTC, Rio de Janeiro, 2011.

[3] A. Steinbruch and P. Winterle. *Álgebra Linear.* 2. Ed., Pearson, São Paulo, 1995.

