

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Modelos de Distribuição Fuzzy com VaR Aplicados em Carteiras de Investimento

Daniela Baena Pereira¹

Pedro Robson Pascoal Ribamar²

Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, UFPA, Belém, PA

Marcus P. C. da Rocha³

Valcil João C. Farias⁴

Curso de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, UFPA, Belém, PA

1 Introdução

No modelo de média-variância para a seleção de portfólio proposto por Markowitz [2], define-se o retorno esperado de um portfólio e a variância dos retornos como o retorno do investimento e o risco do investimento, respectivamente, e combina-se a teoria da probabilidade com técnicas de otimização para modelar o comportamento do investimento sob incerteza. Li em [1], propôs um modelo de portfólio de possibilidades sob as restrições de investimento VaR e livre de riscos, considerando que os retornos dos ativos são variáveis fuzzy com distribuição normal. Com base no artigo de Li [1] consideramos que os retornos dos ativos são variáveis fuzzy e modelamos a partir da distribuição Laplace como visto em [3]. Em seguida comparamos os resultados obtidos nas duas simulações (Normal e Laplace).

2 Distribuição Laplace Fuzzy

A taxa de retorno dos ativos i é uma distribuição Laplace fuzzy definida como:

$$A_{\tilde{\varphi}_i}(t/\mu, b) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|t - \mu|}{b}\right), \quad (1)$$

sendo $\sigma_i^2 = 2b^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_i^2 = b$. O conjunto de nível de $\tilde{\varphi}_i$ é definido como:

$$[\tilde{\varphi}_i]^2 = \left[\mu - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_i \ln \sqrt{2}\sigma_i\gamma; \mu + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_i \ln \sqrt{2}\sigma_i\gamma\right]. \quad (2)$$

¹danielabaena03@gmail.com

²pedrorobson28@hotmail.com

³marcus.rocha60@gmail.com

⁴valcir@ufpa.br

Suponha que existem n ativos de risco e um ativo livre de risco e x_j representa a proporção investida em ativos i , e r_f é o retorno do ativo livre de risco. Portanto, segundo [3], a equação (3), representa o modelo do portfolio de possibilidades sobre restrições VaR e investimentos livres de risco e os resultados obtidos são apresentados na Tabela 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i>j=1}^n x_i x_j \sigma_i \sigma_j \right) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i (\mu_i - r_f) + r_f \geq \tilde{r} \\ (p/\text{VaR} - \sum_{i=1}^n x_i \mu_i) \leq b \log[2b(1 - \beta)] \quad p/\text{VaR} < \sum_{i=1}^n x_i \mu_i, \\ (\sum_{i=1}^n x_i \mu_i - p/\text{VaR}) \leq b \log[2b(1 - \beta)] \quad p/\text{VaR} \geq \sum_{i=1}^n x_i \mu_i, \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \quad 0 \leq l_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, 2, \dots, n, \end{array} \right. \quad (3)$$

sendo $b = \frac{\sqrt{2}}{16} (\sum x_i \sigma_i)^2$.

Tabela 1: Resultados obtidos para os moldelos (MVPLZ) e MVPNZ).

MVPLZ	Modelo média-variância de possibilidades para uma distribuição Laplace Fuzzy								
Risco (%)	4.560	7.855	10.210	12.299	17.772	24.064	28.359	65.947	73.599
Retorno (%)	6.090	8.099	9.281	10.140	12.031	13.871	14.991	21.230	21.950
MVPNZ	Modelo média-variância de possibilidades para uma distribuição Normal Fuzzy								
Risco (%)	3.915	6.742	8.765	10.558	15.256	20.657	24.343	56.610	63.178
Retorno (%)	6.090	8.099	9.281	10.140	12.031	13.871	14.991	21.230	21.950
x_1	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
x_2	0	0	0	0	0	0	0	0,0724	0,15
x_3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.3
x_4	0	0	0	0.0246	0.0994	0.1722	0.2165	0.3	0.3
x_4	0.1	0.1586	0.1931	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
$\sum x_i$	0.25	0.3086	0.3431	0.3746	0.4494	0.5222	0.5665	0.9224	1

3 Conclusões

Neste trabalho desenvolvemos o MVPLZ e geramos uma sequência de resultados e comparamos com o MVPNZ e concluímos que os resultados apresentaram um comportamento esperado para os dois modelos de média-variância de possibilidades. Na medida em que aumentamos a VaR, ou seja, quando consideramos uma maior perda do valor de mercado, temos como consequência que a taxa de risco será maior, isto é, quanto maior o retorno maior a taxa de risco, este fato foi demonstrado nos dois modelos. Desta forma proporcionando ao investidor avesso ao risco, uma maior possibilidade de avaliação.

Referências

[1] T. Li, W. Zhang, and W. Xu. Fuzzy possibilistic portfolio selection model with VaR constraint and risk-free investment. *Economic Modeling* 31:12-17, 2013.

[2] H. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7:77-91,1953.

[3] M. P. C. Rocha, B. C. Bedegral, L. L. Costa, and H. Salles. Fuzzy probability distribution with VaR constraint for portfolio selection, IFSA-EUSFLAT, 01:01-04, 2015.