Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo do Método das Potências e Método das Potências com Aceleração de Aitken

Modesto Valci Moreira Lopes[1]
Hedjany Sena da Silva[2]
Ivan Mezzomo[3]
Matheus da Silva Menezes[4]
Centro de Ciências Exatas e Naturais, UFERSA, Mossoró, RN
Stefeson Bezerra de Melo[5]
Departamento de Ciências Exatas, Tecnológicas e Humanas, UFERSA, Campus Angicos, RN

O Método das Potências consiste em determinar o maior autovalor em módulo e seu autovetor associado, de uma matriz quadrada A, sem a necessidade de descobrir o polinômio característico. O método das potências possui várias aplicações tal como no ranqueamento de páginas utilizada pelo Google. No entanto, esse método é útil desde que queremos determinar apenas alguns autovalores, de módulo grande e que estejam bem separados dos demais. Além disso, podemos ter complicações caso a matriz A não possua autovetores linearmente independentes. O objetivo desse trabalho é comparar, por meio da implementação no software Scilab, o número de iterações e o tempo de processamento entre o Método das Potências e o Método das Potências com aceleração de convergência. O método das potências é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 1: [2, Teorema 6.2] *Seja A uma matriz real quadrada de ordem n e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ seus autovalores e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ seus correspondentes autovetores. Suponha que os autovetores são lineramente independentes e que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Seja a sequência y_k definida por $y_{k+1} = Ay_k$ com $k = 1, 2, \ldots$, onde y_0 é um vetor arbitrário que permite a expansão $y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$, com c_j escalares quaisquer e $c_1 \neq 0$, então $\lim_{k\to\infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1$, onde r indica a r-ésima componente. Além disso, quando $k \to \infty$, y_k tende ao autovetor correspondente a λ_1.*

Quanto maior for $|\lambda_1|$ quando comparado com $|\lambda_2|$, mais rápida será a convergência [2]. O Método de Aitken Δ^2 pode ser utilizado para acelerar a convergência do método das potências de uma sequência linearmente convergente.

[1]modsval@gmail.com
[2]hedjany@icloud.com
[3]imezzomo@ufersa.edu.br
[4]matheus@ufersa.edu.br
[5]stefeson@ufersa.edu.br

Teorema 2: [1] Suponha que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência linearmente convergente com limite P. Para motivarmos a criação de uma sequência $\{P'_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge mais rapidamente para P do que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, primeiro assumimos que as expressões $P_n - P$, $P_{n+1} - P$ e $P_{n+2} - P$ coincidam e n é suficientemente grande tal que:

$$\text{Método de Aitken } \Delta^2 : P = P_n - \frac{(P_{n+1} - P_n)^2}{P_{n+2} - P_{n+1} + P_n}. \tag{1}$$

Tabela 1: Características dos problemas utilizados nos testes

Nome	Tamanho	Diag. Dominante	Tipo de Matriz	Esparso
e05r0000	236×236	Não	real não-simétrica	Não
e05r0100	236×236	Não	real não-simétrica	Não
fidap014	3251×3251	Não	real não-simétrica	Não
fidap019	12005×12005	Não	real não-simétrica	Não
nos237	237×237	Não	real simétrica e def. positiva	Não

As matrizes foram obtidas através do repositório Matrix Market. Visando analisar a funcionalidade do algoritmo proposto, efetuamos a implementação dos métodos no SciLab 5.5.2 em uma máquina com processador Intel Core i5, 4GB de RAM e sistema operacional Windows 10. Como critério de parada, usamos o teste do erro absoluto para cada componente de λ_1 dada por: $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|_r < \epsilon$, com precisão 10^{-3}. Na Tabela 2, os dados entre parênteses se referem ao percentual de eficiência do método das potências com aceleração em relação ao método das potências.

Tabela 2: Resultado dos experimentos realizadas

Problema	Iterações	Autovalor	T(s)	Iterações Δ^2	Autovalor Δ^2	T(s) Δ^2
e05r0000	33	12,631125	0,282	24 $(27, 27\%)$	12,621089	0,233 $(17, 38\%)$
e05r0100	250	12,539272	0,422	64 $(74, 40\%)$	12,506382	0,27 $(36, 02\%)$
fidap014	4331	12666234	24,851	1433 $(66, 91\%)$	12666234	7,967 $(67, 94\%)$
fidap019	273	51119718	22,933	185 $(32, 23\%)$	5119719	17,595 $(23, 28\%)$
nos237	5875	$2,457 \times 10^9$	10,505	2069 $(64, 78\%)$	$2,457 \times 10^9$	5,12 $(51, 26\%)$

Nos experimentos podemos comprovar que o método das potências com aceleração foi mais eficiente em relação ao método das potências tanto no número de iterações quanto no tempo de execução. A economia de iterações no método das potências com aceleração ficou entre $27, 27\%$ e $74, 40\%$ e no tempo de execução entre $17, 38\%$ e $67, 94\%$.

Referências

[1] R. L. Burden, D. Faires and A. M. Burden. *Análise Numérica.* 3. ed., Cengage Learning, São Paulo, 2015.

[2] N. B. Franco. *Cálculo Numérico.* 6. Ed., Pearson, São Paulo, 2006.

[3] F. Izadi. *Iterative Methods for Computing Eigen values and Eigen vectors with an Improved.* International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology, Vol. 3, Issue 6, 2014, 13710 - 13713.