Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Três condições suficientes para a solução de sistemas lineares tridiagonais por decomposição LU

Gustavo Borges Valim[1]
Faculdade de Engenharia Mecânica, UFU, Uberlândia, MG
Santos A. Enriquez-Remigio[2]
Faculdade de Matemática, UFU, Uberlândia, MG

Resumo

Neste trabalho apresentamos teoremas que garantem a existência e o uso da decomposição LU na resolução de sistemas lineares tridiagonais.

1 Introdução

Sistemas de equações lineares tridiagonais aparecem na resolução numérica de equações diferenciais que modelam problemas físicos, biológicos e químicos, dentre outros. É sabido que se a matriz dos coeficientes, A, for estritamente diagonal dominante a decomposição LU existe e a matriz A é não singular ([1]). Surge a seguinte pergunta: para que outros típos de matrizes tridiagonais podemos garantir a existência e o uso da decomposição LU na resolução do sistema linear tridiagonal?

2 Metodologia

A seguir definimos alguns conjuntos de matrizes tridiagonais e apresentamos alguns teoremas. Para isto, consideremos a matriz tridiagonal A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & a_1 & 0 & & \dots & 0 \\ b_2 & d_2 & a_2 & & & \vdots \\ 0 & b_3 & d_3 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & b_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & \dots & & & b_n & d_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

E associamos os números c_i's, definidos por: $c_1 = d_1$ e $c_i = d_i - \dfrac{b_i}{c_{i-1}} a_{i-1},\ i = 2, \dots, n.$

A definição que se segue é para qualquer matriz A.

[1]gustavoborgesvalim@ufu.br
[2]santos.er@ufu.br

Definição 2.1. *Uma matriz é diagonal estritamente dominante se:* $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$

A seguir vamos definir quatro conjuntos.

Definição 2.2. *Sejam os conjuntos* M, M_1, M_2 *e* M_3 *dados por:*

1. $M = \left\{ A \in M_{(n,n)}(\mathbb{R}) / \; A \text{ é uma matriz tridiagonal.} \right\}$
2. $M_1 = \{ A \in M / \; A \text{ é diagonal estritamente dominante.} \}$
3. $M_2 = \{ A \in M / \; |d_1| > |a_1| > 0, \; |d_i| \geq |a_i| + |b_i|, \; i = 2, \ldots, n-1, \; |d_n| > |a_n| > 0$ *e* $a_i b_i \neq 0, \; i = 2, \ldots, n-1. \}$
4. $M_3 = \{ A \in M / c_i \neq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n \}.$

3 Resultados

A demonstração dos teoremas que se seguem pode ser encontrada no relatório [4] (em elaboração).

Teorema 3.1. *Seja* $A \in M_1$ *([1]) ou* $A \in M_2$ *([2]) ou* $A \in M_3$ *([3]), então:*

1. *Existe a decomposição* LU *da matriz* A*;*
2. $det(A) \neq 0.$

Teorema 3.2. *([4])* $M_1 \cap M_2 \neq \phi$, $M_1 \neq M_2$ *e* $M_1, M_2 \subset M_3$.

O Teorema 3.1 fornece as três condições suficientes para a solução de sistemas lineares tridiagonais por decomposição LU.

Agradecimentos

Ao professor EI-Mikkawy da Faculdade de Ciências da Universidade Mansoura, Egito. Ao PROMAT/FAMAT da UFU.

Referências

[1] R. L. Burden, J. D. Faires. *Análise Numérica*; tradução da 8 ed. norte americana. Cengage Learning, São Paulo, 2011.

[2] M.E.A. El-Mikkawy. *On the inverse of a general tridiagonal matrix*, Elsevier, 2003. DOI: 10.1016/S0096-3003(03)00298-4

[3] E. Isaacson, H. B. Keller. *Analysis of Numerical Methods.* Dover Publications, New York, 1994.

[4] G. B. Valim, S. A. Enriquez-Remigio. *Método de Solução Direta para Sistemas Lineares tridiagonais e pentadiagonais.* Relatório final PROMAT/UFU, Uberlândia, 2017. No prelo.