

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Introdução à Modelagem da Variação Térmica de uma Placa Genérica Através de Equações de Diferenças Finitas

Eduardo Matias dos Santos¹

Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade do Estado do Mato Grosso, Sinop, MT

Silvio Cesar Garcia Granja²

Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade do Estado do Mato Grosso, Sinop, MT

1 Introdução

Construiu-se um modelo matemático preliminar, por meio da análise de leis termodinâmicas, que descreve a variação de temperatura ao longo do tempo em determinado corpo sólido exposto a uma fonte de radiação equivalente ao Sol. Com o objetivo de verificar a variação diária de temperatura do sólido em função da troca de calor com outro, equivalente ao Sol, chamado simplesmente Sol.

2 Descrição e modelagem do problema

Considera-se uma placa de um material sólido genérico, será chamada de B no decorrer do trabalho. Considera-se que esta placa tem a mesma velocidade angular do movimento de rotação da Terra. Estuda-se a interação termodinâmica entre a placa B e o Sol. À medida que a Terra descreve seu movimento de rotação em torno de si mesma, induz uma aparente trajetória circular sofrida pelo Sol. Para fins práticos, refere-se a esse fenômeno como trajetória solar. Identifica-se a posição do sol através de três componentes básicas: o ângulo azimutal θ , o ângulo zenital φ e a altura solar h . O ângulo azimutal descreve a inclinação do sol em relação ao norte, variando ao longo do dia. O ângulo zenital está relacionado à altura solar.

A Terra descreve uma rotação com velocidade angular $\omega = (2\pi/24)$ rad/h. A função horária da posição angular θ , descrevendo o ângulo zenital medido em radianos, em função do tempo t , medido em horas, é $\theta(t) = \frac{-6\pi}{12} + \frac{\pi}{12t}$, com t medido em horas e θ em radianos.

A radiação produzida pelo Sol que chega à Terra pode ser refletida ou absorvida pela atmosfera terrestre. A radiação absorvida pode seguir em linha reta até o solo, chamada radiação direta (RD), ou dispersar-se na atmosfera, chamada radiação difusa (RI). Apenas a radiação direta, que afeta objetos expostos diretamente ao Sol, será considerada neste estudo. A Primeira Lei da Termodinâmica diz que a variação de energia interna de um

¹sinop@esf-brasil.org

²silvio.granja@unemat.br

corpo é igual à diferença entre o calor Q recebido pelo corpo e o trabalho W realizado por ele, $\Delta E_{int} = Q - W$. A placa B não realiza trabalho, portanto temos $W = 0$ e, portanto, $\Delta E_{int} = Q$.

A relação entre a potência de energia emitida e a temperatura da placa é ditada pela Lei de Stefan-Boltzman, em que a potência absorvida por um corpo com absorvidade α , por uma área transversal que varia diariamente, $A_e = A \sin \theta(t)$, a partir de um corpo radiante à temperatura T_s é $P_a = \sigma \alpha T_s^4 A \sin \theta(t)$, enquanto que a potência emitida por esse corpo, com emissividade ε , que está à temperatura T é $P_e = \sigma \varepsilon T^4 A$. Em que $\sigma = 5,670367 \times 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ é a constante de Stefan-Boltzman. Pode-se afirmar que a taxa de variação da energia interna da placa B em um determinado instante é dada pela diferença da energia recebida pela energia emitida, isto é, $\frac{dE_{int}}{dt} = P_a - P_e$.

Considerando que a placa de massa m e calor específico c sofre apenas mudança de temperatura, tem-se que o calor trocado pela placa é proporcional à sua variação de temperatura [1] tal que $Q = mc\Delta T$. Uma variação infinitesimal de temperatura causa a variação proporcional de calor absorvido, $dQ = mc dT$, e empregando as equações anteriores, a relação entre a taxa temporal de calor retido na placa e as temperaturas da placa e do Sol pode ser calculada pela expressão $mc \frac{dT}{dt} = P_a - P_e$. Substituindo-se as potências absorvida e emitida pela placa a partir das relações propostas, obtém-se a seguinte equação diferencial ordinária que dita a dinâmica temporal da temperatura da placa B em função do tempo

$$\frac{dT}{dt} = \alpha T_s^4 \sin \theta(t) - \tilde{\varepsilon} T^4, \quad (1)$$

em que $\alpha = \sigma \alpha / \Gamma$, $\tilde{\varepsilon} = \sigma \varepsilon / \Gamma$, $\Gamma = mc/A$ são os parâmetros físicos e geométricos da placa e que o fator $\sin \theta(t)$ deve ser nulo a noite.

Pode empregar o Método das Diferenças Finitas para se obter soluções numéricas desta equação. Neste método, as taxas de variação são aproximadas por diferenças finitas divididas de forma que, se os instantes no tempo são descritos por t_n com $n = 1, 2, 3, \dots$, então $T(t_n) = T_n$ e as diferenciais podem ser aproximadas, em primeira ordem, por $dt \approx \Delta t = t_{n+1} - t_n$ e $dT \approx \Delta T = T_{n+1} - T_n$. Assim, tem-se

$$T_{n+1} = T_n + \left\{ \alpha T_s^4 \sin \left[\left(\frac{t_n - 6}{12} \right) \pi \right] - \tilde{\varepsilon} T_n^4 \right\} \Delta t \quad (2)$$

de dia e à noite $T_n + \tilde{\varepsilon} T_n^4 \Delta t$. com $n = 0, 1, 2, \dots$

Referências

- [1] H. M. Nussenzveig. *Curso de física básica, volume 4*. Edgard Blücher, São Paulo, 2001.
- [2] H. M. Halliday, R. Resnick and J. Walker. *Fundamentos da Física, volume 4*. LTC, São Paulo, 2009.