Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Métodos de resolução da equação do calor unidimensional em regime transiente

Patrícia Neves de Araújo[1]
Instituto de Matemática e Estatística, USP, São Paulo, SP
Flávia Milo dos Santos[2]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, SP
Ânderson da Silva Vieira[3]
Fatec - Carapicuíba e Faculdade Mario Schenberg, Cotia, SP

1 Introdução

A equação do calor é um exemplo de como a matemática pode auxiliar na compreensão de fenômenos físicos por meio da modelagem dos mesmos. Com base nisso, este trabalho visa apresentar alguns métodos de resolução da equação do calor utilizando a formulação matemática de uma situação real.

2 Desenvolvimento

O fenômeno a ser estudado consiste na condução de calor unidimensional em regime transiente ocorrendo em uma barra cujas extremidades são mantidas a temperatura $0\,^{\circ}$C e cuja distribuição inicial de temperaturas é dada pela função $f(x) = x(1-x)$. Consideramos o coeficiente de difusibilidade térmica K do material da barra igual a $1m^2/s$. A equação cuja solução procuramos é $u_t = u_{xx}$, com $0 \leq x \leq 1$ e $0 < t \leq 1$.

O método de separação de variáveis fornece uma solução da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{1}$$

em que L é o comprimento da barra e c_n são os coeficientes de Fourier de $f(x)$ (ver [2,3]). Para obter a solução do problema, encontramos os coeficientes de Fourier de $f(x)$ e substituímos na expressão (1), utilizando também as condições do problema. Obtemos assim a função

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^3} e^{-((2n+1)\pi)^2 t}. \tag{2}$$

[1]patricia.neves.araujo@hotmail.com
[2]flaviamilo@ifsp.edu.br
[3]anderdsvieira@gmail.com

Os métodos numéricos fornecem aproximações para os valores da solução em pontos dados. Consideramos como h o valor do passo na variável x e k o valor do passo na variável t. No problema estudado, temos $h = \frac{1}{3}$ e $k = \frac{1}{54}$. Utilizando o parâmetro $\sigma = \frac{K \cdot k}{h^2}$, o método explícito fornece a expressão

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \sigma(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}), \tag{3}$$

onde $U_{i,j}$ é o valor aproximado de $u(x_i, t_j)$, em que $(x_i, t_j) = \{(\overline{x} + ih, \overline{t} + jk); i, j \in \mathbb{N}\}$ e $(\overline{x}, \overline{t})$ é um ponto de referência escolhido.

Do método implícito obtemos a relação

$$-\sigma U_{i-1,j} + (1 + 2\sigma)U_{i,j} - \sigma U_{i+1,j} = U_{i,j-1}. \tag{4}$$

Um estudo detalhado sobre esses métodos de resolução pode ser encontrado em [1].

A Tabela 1 apresenta os valores obtidos através das equações (2), (3) e (4), respectivamente.

Tabela 1: Resultados obtidos

Soluções obtidas	$U_{0,1}$	$U_{1,1}$	$U_{2,1}$	$U_{3,1}$
Solução exata	0	0.186102	0.186102	0
Método explícito	0	0.185185	0.185185	0
Método implícito	0	0.190476	0.190476	0

3 Conclusões

Comparando os resultados obtidos com os métodos apresentados, é possível afirmar que o erro resultante da aplicação dos métodos numéricos é relativamente pequeno, de modo que seu uso permite obter uma boa representação sobre a função solução do problema. Como possibilidades para trabalhos futuros, sugerimos o estudo de outras formas da equação do calor e de outros modelos, como a equação da onda.

Referências

[1] J. C. Cuminato and M. M. Junior. *Discretização de Equações diferenciais parciais.* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.

[2] D. de Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações diferenciais parciais.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

[3] V. Iório. *EDP: um curso de graduação.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2005.