

# SOBRE O PROCEDIMENTO DE ORTOGONALIZAÇÃO DA DCM NO AUTO-ALINHAMENTO GROSSEIRO DE SISTEMAS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL SOLIDÁRIOS

FELIPE OLIVEIRA E SILVA\*, WALDEMAR DE CASTRO LEITE FILHO\*

*\*Instituto de Aeronáutica e Espaço - Divisão de Sistemas Espaciais  
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 - Vila das Acácias  
São José dos Campos, SP, Brasil*

Emails: felipefos@iae.cta.br, waldemarwclf@iae.cta.br

**Abstract**— This paper presents two different coarse self-alignment methods for strapdown inertial navigation systems, which lead to different error propagation formulas for the direct cosine matrix relating body-frame axes to navigation-frame axes. While the first method reduces normality errors on the matrix, the second one reduces the alignment errors and eliminates the orthogonality errors, being considered, therefore, superior. An iterative orthogonalization process for the matrix obtained by the first method is proposed, in order to evaluate if this would result in obtaining the same matrix calculated by the second method. An experimental test on a high-accuracy strapdown inertial navigation system showed that, although the orthogonalization process properly eliminate orthogonality errors on the matrix, it contributes to increasing the alignment errors and therefore its implementation is not recommended.

**Keywords**— Navigation and self-location, Coarse self-alignment, Orthogonalization, Alignment errors.

**Resumo**— Neste artigo são apresentadas duas metodologias de auto-alinhamento grosseiro para sistemas de navegação inercial solidários, os quais conduzem a diferentes fórmulas de propagação de erros para a matriz de transformação de coordenadas que relaciona o triedro do corpo ao de navegação. Enquanto a primeira metodologia reduz os erros de normalidade atrelados à matriz, a segunda reduz os erros de alinhamento e elimina os de ortogonalidade, sendo considerada, portanto, superior. Um algoritmo iterativo de ortogonalização da matriz obtida pela primeira metodologia é proposto, no intuito de se verificar se ele resultaria na obtenção da mesma matriz calculada pela segunda metodologia. Um ensaio experimental realizado em um sistema de navegação inercial solidário de alta precisão mostrou que, embora o procedimento de ortogonalização elimine apropriadamente os erros de ortogonalidade da matriz, ele contribui para o aumento dos erros de alinhamento, e portanto, sua implementação não é aconselhada.

**Palavras-chave**— Navegação e auto-localização, Auto-alinhamento grosseiro, Ortogonalização, Erros de alinhamento.

## 1 Introdução

Navegação inercial é o processo de se determinar, a cada instante, a localização, a velocidade e a orientação de um corpo num determinado sistema de coordenadas, baseando-se apenas em sensores inerciais, geralmente acelerômetros e giroscópios (Savage, 2007).

A determinação destas variáveis só é possível integrando-se numericamente as forças específicas obtidas a cada instante de amostragem pelos acelerômetros, e como todo e qualquer processo de integração, para que se obtenha valores corretos para as variáveis integradas, suas condições iniciais devem ser conhecida a priori. A este processo dá-se o nome de inicialização.

Como atestado por (Titterton and Weston, 2004), dentre as fontes de erro que afetam os algoritmos de navegação inercial (erros de quantização, bias nos acelerômetros, deriva nos giroscópios, etc), o procedimento de inicialização, quando mal conduzido, é um dos maiores contribuintes para a perda de acurácia do sistema, levando a um acúmulo inadmissível de erros em um curto intervalo de tempo.

Grande parte dos procedimentos de inicialização de sistemas de navegação inercial solidários

ocorre em condições estacionárias, e a menos de perturbações externas causadas por vibrações e rajadas de vento por exemplo, a posição e a velocidade do veículo são conhecidas com precisão e estão disponíveis previamente (a velocidade é considerada nula, uma vez que o veículo é suposto estar em condições estacionárias, e a posição pode ser determinada por meios externos via, por exemplo, GPS).

A orientação inicial do veículo, contudo, não é conhecida a priori, e no caso de um veículo lançador de satélites por exemplo, (foco de aplicação deste artigo), é de suma importância que o sistema de navegação inercial seja capaz de determinar a orientação inicial do mesmo sem nenhum auxílio externo (Farrel and Barth, 1999). Ao processo de inicialização da orientação do veículo, dá-se o nome de alinhamento. No caso desta inicialização ser realizada sem nenhum auxílio externo, o procedimento é denominado auto-alinhamento (Jekeli, 2000).

De uma forma geral, o procedimento de auto-alinhamento de um sistema de navegação inercial solidário, consiste em duas etapas (Savage, 2007): o auto-alinhamento grosseiro e o auto-alinhamento fino. O auto-alinhamento grosseiro é implementado através da medição dos vetores gra-

vidade e velocidade angular da terra, e resulta em valores aproximados para a orientação do veículo (Shimelevich and Naor, 1996). O procedimento de auto-alinhamento fino, por sua vez, é implementado imediatamente após o grosseiro, e serve para corrigir os valores aproximados obtidos para o alinhamento do veículo (Britting, 1971).

Neste artigo, serão apresentadas, em suas Seções 2 e 3, duas metodologias de auto-alinhamento grosseiro usualmente empregadas em sistemas de navegação inercial solidários. Sabe-se que essas metodologias propagam os erros na matriz de transformação de coordenadas de formas diferentes. Enquanto uma reduz os erros de normalidade, a outra reduz os de alinhamento e elimina os de ortogonalidade.

O objetivo deste artigo é verificar se um eventual processo de ortogonalização da matriz de transformação de coordenadas obtida pelo primeiro método, apresentado na Seção 4, permite se obter a mesma matriz de transformação de coordenadas do segundo método. Na Seção 5, uma análise é feita com base em resultados experimentais de um sistema de navegação inercial de alta precisão. As conclusões são apresentadas na Seção 6.

## 2 Método tradicional

### 2.1 Dedução analítica

Uma das metodologias de auto-alinhamento grosseiro mais referidas na literatura (Britting, 1971) baseia-se na medição de três vetores não-colineares, a saber, os vetores gravidade  $\vec{g}$ , velocidade angular da terra  $\vec{\omega}_{IE}$ , e o produto vetorial dos dois,  $\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE}$ , cujas componentes são bem conhecidas no triedro de navegação, isto é:

$$\vec{g}^N = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{\omega}_{IE}^N = \begin{bmatrix} \omega_{IE} \sin L \\ 0 \\ \omega_{IE} \cos L \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE})^N = \begin{bmatrix} 0 \\ g\omega_{IE} \cos L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde  $g$  e  $\omega_{IE}$  representam respectivamente a magnitude dos vetores gravidade e velocidade angular da terra,  $L$  é a latitude do veículo e o índice  $N$  indica que os vetores estão representados no triedro de navegação. O triedro de navegação é aqui definido com seus eixos  $x_N$ ,  $y_N$  e  $z_N$  apontando respectivamente para as direções vertical local, leste e norte (configuração *UEN* - *up, east, north*) e o veículo é suposto estar no hemisfério sul.

Estes mesmos vetores podem ser representados no triedro do corpo, e especialmente para o

caso do alinhamento estacionário, são definidos como:

$$\vec{g}^B = \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ -f_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\vec{\omega}_{IE}^B = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$(\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE})^B = \begin{bmatrix} f_z\omega_y - f_y\omega_z \\ f_x\omega_z - f_z\omega_x \\ f_y\omega_x - f_x\omega_y \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  são as forças específicas medidas pelos acelerômetros e  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  são as velocidades angulares medidas pelos giroscópios, nos respectivos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . O índice  $B$  indica que os vetores estão representados no triedro do corpo.

A representação dos vetores acima definidos segue a seguinte relação:

$$\vec{g}^N = C_B^N \vec{g}^B \quad (7)$$

$$\vec{\omega}_{IE}^N = C_B^N \vec{\omega}_{IE}^B \quad (8)$$

$$(\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE})^N = C_B^N (\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE})^B \quad (9)$$

onde  $C_B^N$  é a matriz de transformação de coordenadas, ou DCM (*Direct Cosine Matrix*) que relaciona o triedro do corpo ao triedro de navegação, e que, portanto, serve para caracterizar o alinhamento inicial do veículo.

Definindo-se:

$$N = \begin{bmatrix} \vec{g}^N \\ \vec{\omega}_{IE}^N \\ (\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE})^N \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

$$B = \begin{bmatrix} \vec{g}^B \\ \vec{\omega}_{IE}^B \\ (\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE})^B \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

Temos:

$$N = C_B^N B \quad (12)$$

Como, por definição,  $C_B^N = (C_N^B)^T$ :

$$C_B^N = (N^{-1})^T B^T \quad (13)$$

Efetuando as operações acima, chega-se a:

$$C_B^N = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (14)$$

onde:

$$c_{11} = \frac{f_x}{g} \quad (15)$$

$$c_{12} = \frac{f_y}{g} \quad (16)$$

$$c_{13} = \frac{f_z}{g} \quad (17)$$

$$c_{21} = \frac{f_z\omega_y - f_y\omega_z}{g\omega_{IE} \cos L} \quad (18)$$

$$c_{22} = \frac{f_x \omega_z - f_z \omega_x}{g \omega_{IE} \cos L} \quad (19)$$

$$c_{23} = \frac{f_y \omega_x - f_x \omega_y}{g \omega_{IE} \cos L} \quad (20)$$

$$c_{31} = \frac{g \omega_x - f_x \omega_{IE} \sin L}{g \omega_{IE} \cos L} \quad (21)$$

$$c_{32} = \frac{g \omega_y - f_y \omega_{IE} \sin L}{g \omega_{IE} \cos L} \quad (22)$$

$$c_{33} = \frac{g \omega_z - f_z \omega_{IE} \sin L}{g \omega_{IE} \cos L} \quad (23)$$

Como pode ser observado, calculando-se (15) a (23), o alinhamento inicial do veículo pode ser completamente determinado utilizando-se apenas as leituras dos sensores inerciais.

### 2.2 Análise de erros

Embora a abordagem analítica apresentada na Seção 2.1 esteja conceitualmente correta, o valor exato da matriz de transformação de coordenadas  $C_B^N$  não pode ser determinado na prática. Isto se deve fundamentalmente à existência de ruídos e perturbações externas atreladas às leituras dos sensores inerciais e às pequenas movimentações do veículo. O que se obtém na prática, portanto, é uma estimativa da  $C_B^N$ , representada por  $\hat{C}_B^N$ , a qual pode ser genericamente equacionada como (Savage, 2007):

$$\hat{C}_B^N = (I + E)C_B^N \quad (24)$$

Na equação acima,  $E$  é a matriz que contém os erros da  $\hat{C}_B^N$ , e pode ser decomposta em duas submatrizes, uma simétrica  $E_S$ , que representa os erros de ortogonalidade ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ ) e normalidade ( $\eta_x$ ,  $\eta_y$  e  $\eta_z$ ) de  $\hat{C}_B^N$ , e outra anti-simétrica  $E_{AS}$ , correspondente aos erros de alinhamento ( $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$ ) de  $\hat{C}_B^N$  com relação a  $C_B^N$ :

$$E = E_S + E_{AS} \quad (25)$$

onde:

$$E_S = \frac{E + E^T}{2} = \begin{bmatrix} \eta_x & \sigma_z & \sigma_y \\ \sigma_z & \eta_y & \sigma_x \\ \sigma_y & \sigma_x & \eta_z \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$E_{AS} = \frac{E - E^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 0 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Para o caso do alinhamento estacionário, pode-se considerar que os erros na determinação da matriz de transformação de coordenadas advêm principalmente das incertezas dos sensores inerciais, e assim, pode-se reescrever (13) da seguinte forma:

$$\hat{C}_B^N = (N^{-1})^T \hat{B}^T \quad (28)$$

onde:

$$\hat{B} = B + \delta B \quad (29)$$

e:

$$\delta B = \begin{bmatrix} -\delta f_x & \delta \omega_x & \delta v_x \\ -\delta f_y & \delta \omega_y & \delta v_y \\ -\delta f_z & \delta \omega_z & \delta v_z \end{bmatrix} \quad (30)$$

Nas equações acima,  $\delta f_x$ ,  $\delta f_y$ ,  $\delta f_z$ ,  $\delta \omega_x$ ,  $\delta \omega_y$  e  $\delta \omega_z$  representam os erros nas leituras dos acelerômetros e giroscópios, respectivamente, e:

$$\delta v_x = -\omega_z \delta f_y - f_y \delta \omega_z + \omega_y \delta f_z + f_z \delta \omega_y \quad (31)$$

$$\delta v_y = -\omega_x \delta f_z - f_z \delta \omega_x + \omega_z \delta f_x + f_x \delta \omega_z \quad (32)$$

$$\delta v_z = -\omega_y \delta f_x - f_x \delta \omega_y + \omega_x \delta f_y + f_y \delta \omega_x \quad (33)$$

Substituindo (29) em (28), obtém-se:

$$\hat{C}_B^N = (I + (N^{-1})^T \delta B^T C_B^N) C_B^N \quad (34)$$

Comparando (24) com (34), conclui-se que:

$$E = (N^{-1})^T \delta B^T C_B^N \quad (35)$$

Eq. (35) é a equação de análise de erros base para grande parte das metodologias de auto-alinhamento grosseiros. Infelizmente, para uma escolha arbitrária da  $C_B^N$ , a equação acima apresentada não é facilmente interpretável (Britting, 1971). Uma solução particularmente simples é obtida considerando-se um alinhamento perfeito entre os triedros do corpo e de navegação, isto é  $C_B^N = I$ . Neste caso:

$$E = (N^{-1})^T \delta B^T \quad (36)$$

e:

$$\delta v_x = -\delta f_y \omega_{IE} \cos L \quad (37)$$

$$\delta v_y = \delta f_x \omega_{IE} \cos L - \delta f_z \omega_{IE} \sin L + \delta \omega_z g \quad (38)$$

$$\delta v_z = \delta f_y \omega_{IE} \sin L - \delta \omega_y g \quad (39)$$

Substituindo-se (10), (30), (37), (38) e (39) em (36), e o resultado em (26) e (27), obtém-se:

$$\eta_x = \frac{\delta f_x}{g} \quad (40)$$

$$\eta_y = \frac{\delta f_x}{g} - \frac{\delta f_z \tan L}{g} + \frac{\delta \omega_z}{\omega_{IE} \cos L} \quad (41)$$

$$\eta_z = -\frac{\delta f_z \tan L}{g} + \frac{\delta \omega_z}{\omega_{IE} \cos L} \quad (42)$$

$$\sigma_x = \sigma_z = 0 \quad (43)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\delta f_x \tan L}{g} + \frac{\delta f_z}{g} + \frac{\delta \omega_x}{\omega_{IE} \cos L} \right] \quad (44)$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta f_y \tan L}{g} - \frac{\delta \omega_y}{\omega_{IE} \cos L} \quad (45)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\delta f_x \tan L}{g} - \frac{\delta f_z}{g} + \frac{\delta \omega_x}{\omega_{IE} \cos L} \right] \quad (46)$$

$$\epsilon_z = \frac{\delta f_y}{g} \quad (47)$$

Substituindo em seqüência, (26) e (27) em (35) e o resultado em (24), conclui-se que a DCM obtida ao final do procedimento de auto-alinhamento grosseiro pela metodologia tradicional apresenta-se na seguinte forma:

$$\hat{C}_B^N = \begin{bmatrix} 1 + \eta_x & \epsilon_z & \sigma_y - \epsilon_y \\ -\epsilon_z & 1 + \eta_y & \epsilon_x \\ \sigma_y + \epsilon_y & -\epsilon_x & 1 + \eta_z \end{bmatrix} C_N^B \quad (48)$$

Como pode-se observar de (48), a matriz de transformação de coordenadas  $\hat{C}_B^N$  obtida possui todos os erros anteriormente definidos, isto é, erros de ortogonalidade, normalidade e alinhamento.

### 3 Método alternativo

#### 3.1 Dedução analítica

A segunda metodologia abordada neste artigo, aqui denominada metodologia alternativa, é analisada por (Jiang, 1998; Zhao et al., 2011), e à semelhança da metodologia tradicional apresentada anteriormente, também se baseia na medição de três vetores não colineares resultantes da combinação dos vetores gravidade e velocidade angular da terra. Esta metodologia, todavia, não utiliza a tríade  $\vec{g}$ ,  $\vec{\omega}_{IE}$  e  $\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE}$ , mas sim a tríade  $\vec{g}$ ,  $\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE}$  e  $(\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE}) \times \vec{g}$ .

Pode-se definir, portanto:

$$N' = \begin{bmatrix} \vec{g}^N \\ (\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE})^N \\ ((\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE}) \times \vec{g})^N \end{bmatrix}^T \quad (49)$$

$$B' = \begin{bmatrix} \vec{g}^B \\ (\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE})^B \\ ((\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE}) \times \vec{g})^B \end{bmatrix}^T \quad (50)$$

onde:

$$((\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE}) \times \vec{g})^N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g^2 \omega_{IE} \cos L \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} ((\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE}) \times \vec{g})^B &= \\ &= \begin{bmatrix} f_z^2 \omega_x - f_x f_z \omega_z - f_x f_y \omega_y + f_y^2 \omega_x \\ f_x^2 \omega_y - f_x f_y \omega_x - f_y f_z \omega_z + f_z^2 \omega_y \\ f_y^2 \omega_z - f_y f_z \omega_y - f_x f_z \omega_x + f_x^2 \omega_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (52)$$

e:

$$((\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE}) \times \vec{g})^N = C_B^N ((\vec{g} \times \vec{\omega}_{IE}) \times \vec{g})^B \quad (53)$$

À semelhança de (13), e chamando de  $C_B^N$  a matriz de transformação de coordenadas obtida pela metodologia alternativa, tem-se que:

$$C_B^N = (N'^{-1})^T B'^T \quad (54)$$

Efetuando-se as operações, chega-se a:

$$C_B^N = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} \\ c'_{21} & c'_{22} & c'_{23} \\ c'_{31} & c'_{32} & c'_{33} \end{bmatrix} \quad (55)$$

onde:

$$c'_{11} = c_{11} \quad (56)$$

$$c'_{12} = c_{12} \quad (57)$$

$$c'_{13} = c_{13} \quad (58)$$

$$c'_{21} = c_{21} \quad (59)$$

$$c'_{22} = c_{22} \quad (60)$$

$$c'_{23} = c_{23} \quad (61)$$

$$c'_{31} = \frac{f_z^2 \omega_x - f_x f_z \omega_z - f_x f_y \omega_y + f_y^2 \omega_x}{g^2 \omega_{IE} \cos L} \quad (62)$$

$$c'_{32} = \frac{f_x^2 \omega_y - f_x f_y \omega_x - f_y f_z \omega_z + f_z^2 \omega_y}{g^2 \omega_{IE} \cos L} \quad (63)$$

$$c'_{33} = \frac{f_y^2 \omega_z - f_y f_z \omega_y - f_x f_z \omega_x + f_x^2 \omega_z}{g^2 \omega_{IE} \cos L} \quad (64)$$

Comparando-se (15) a (23) com (56) a (64), pode-se observar que a única diferença entre as matrizes de transformação de coordenadas obtidas pelas metodologias tradicional e alternativa recai sobre a terceira linha de cada uma delas.

#### 3.2 Análise de erros

Procedendo da mesma forma que na Seção 2.2, pode-se afirmar que a estimativa da matriz de transformação de coordenadas obtida pela metodologia alternativa também possui erros, os quais, considerando  $C_B^N = I$ , são representados por:

$$E' = (N'^{-1})^T \delta B'^T \quad (65)$$

onde:

$$\delta B' = \begin{bmatrix} -\delta f_x & \delta v_x & \delta t_x \\ -\delta f_y & \delta v_y & \delta t_y \\ -\delta f_z & \delta v_z & \delta t_z \end{bmatrix} \quad (66)$$

Nas equações acima,  $\delta f_x$ ,  $\delta f_y$ ,  $\delta f_z$ ,  $\delta v_x$ ,  $\delta v_y$  e  $\delta v_z$  são os mesmos da Seção 2.2, e:

$$\delta t_x = -g \omega_{IE} \cos L \delta f_z \quad (67)$$

$$\delta t_y = -g \omega_{IE} \sin L \delta f_y + g^2 \delta \omega_y \quad (68)$$

$$\delta t_z = g \omega_{IE} \cos L \delta f_x - g \omega_{IE} \sin L \delta f_z + g^2 \delta \omega_z \quad (69)$$

Substituindo-se (49) e (66) em (65), e o resultado em (26) e (27), obtém-se:

$$\eta'_x = \eta_x \quad (70)$$

$$\eta'_y = \eta_y \quad (71)$$

$$\eta'_z = \frac{\delta f_x}{g} - \frac{\delta f_z \tan L}{g} + \frac{\delta \omega_z}{\omega_{IE} \cos L} \quad (72)$$

$$\sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = 0 \quad (73)$$

$$\epsilon'_x = \epsilon_x \quad (74)$$

$$\epsilon'_y = -\frac{\delta f_z}{g} \quad (75)$$

$$\epsilon_z = \epsilon_z \quad (76)$$

Substituindo os resultados em (24), conclui-se que a DCM obtida ao final do procedimento de auto-alinhamento grosseiro pela metodologia alternativa apresenta-se na seguinte forma:

$$\hat{C}'_B^N = \begin{bmatrix} 1 + \eta_x & \epsilon_z & -\epsilon'_y \\ -\epsilon_z & 1 + \eta_y & \epsilon_x \\ \epsilon'_y & -\epsilon_x & 1 + \eta'_z \end{bmatrix} C_N^B \quad (77)$$

Analisando (77), pode-se observar que a matriz de transformação de coordenadas obtida pela metodologia alternativa possui maiores erros de normalidade do que a obtida pela metodologia tradicional, graças a inserção do termo  $\delta f_x$  no eixo  $z$ , mas possui menores erros de alinhamento, pela eliminação dos termos  $\delta f_x$  e  $\delta \omega_x$  também no eixo  $y$  e nenhum erro de ortogonalidade. Como, de uma forma geral, os erros provenientes dos giroscópios são mais expressivos que os dos acelerômetros, conclui-se que a metodologia de auto-alinhamento grosseiro alternativa é superior à metodologia tradicional.

Outra conclusão que se chega a partir do exposto no parágrafo anterior é que  $\eta_z \approx \eta'_z$ , e portanto, a principal diferença entre  $\hat{C}_B^N$  e  $\hat{C}'_B^N$ , deve recair sobre o elemento  $c_{31}$  destas matrizes. Esta observação ficará evidente nos resultados apresentados na Seção 5.

#### 4 Ortogonalização da DCM

As idéias que motivaram a análise apresentada neste artigo consistem na hipótese de que, uma vez que a DCM obtida ao final do procedimento de auto-alinhamento grosseiro pela metodologia tradicional possui erros de ortogonalidade, o procedimento de ortogonalização desta DCM pode conduzir à mesma DCM obtida pela metodologia alternativa.

Dentre os diversos procedimentos de ortogonalização de matrizes de transformação de coordenadas existentes na literatura, neste artigo será considerado o proposto por (Bar-Itzhack and Meyer, 1976). Este algoritmo baseia-se na minimização da norma euclidiana da  $\hat{C}_B^N$ , e é implementado de forma iterativa, de acordo com as equações abaixo, onde  $(\hat{C}_B^N)_\perp$  é a aproximação ótima ortogonalizada de  $\hat{C}_B^N$  e  $k$  varia tipicamente de 1 a 5:

$$C_k = \frac{3}{2}C_{k-1} - \frac{1}{2}C_{k-1}(C_{k-1})^T C_{k-1} \quad (78)$$

sendo:

$$C_0 = \hat{C}_B^N \quad (79)$$

$$(\hat{C}_B^N)_\perp = C_5 \quad (80)$$

Ao final do procedimento de ortogonalização, espera-se que a matriz de transformação de coordenadas apresente tão somente erros de normalidade e alinhamento, devendo, portanto, assumir a forma de (77).

#### 5 Resultados experimentais

De modo a se testar a hipótese conjecturada na Seção 4, foi realizado um ensaio estático sobre um sistema de navegação inercial solidário de alta precisão com tecnologia a laser (RLG -ring laser gyroscope).

O procedimento consistiu em se alinhar o sistema de navegação inercial utilizando uma mesa rotativa de três eixos, de forma que o triedro do corpo se aproximasse o máximo possível do triedro de navegação, isto é,  $C_B^N \approx I$ . Em seguida, leituras dos acelerômetros e giroscópios foram tomadas a uma taxa de amostragem de 100 Hz durante um período de aproximadamente 16 horas.

Ao final das 16 horas de amostragem, os valores médios das leituras dos sensores inerciais foram calculados e substituídos em (15) a (23), permitindo-se determinar a DCM pela metodologia tradicional. O resultado é mostrado abaixo:

$$\hat{C}_B^N = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0011 & -0.0010 \\ -0.0011 & 0.9968 & -0.0069 \\ 0.0045 & 0.0069 & 0.9968 \end{bmatrix} \quad (81)$$

De igual modo, substituindo-se os valores médios das leituras dos sensores inerciais em (56) a (64), obteve-se a DCM pela metodologia alternativa:

$$\hat{C}'_B^N = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0011 & -0.0010 \\ -0.0011 & 0.9968 & -0.0069 \\ 0.0010 & 0.0069 & 0.9968 \end{bmatrix} \quad (82)$$

Como pode-se observar, a DCM calculada pela metodologia tradicional apresenta erros de ortogonalidade, os quais podem ser percebidos pelos elementos  $c_{13}$  e  $c_{31}$ . Estes erros, contudo, não estão presentes na DCM calculada pela metodologia alternativa. Pode-se observar também que, como era esperado, a diferença entre as matrizes de transformação de coordenadas consiste basicamente no elemento  $c_{31}$  de cada uma delas.

Procedendo com a ortogonalização da DCM obtida pela metodologia tradicional, obtém-se:

$$(\hat{C}_B^N)_\perp = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0011 & -0.0028 \\ -0.0012 & 1.0000 & -0.0070 \\ 0.0027 & 0.0070 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (83)$$

Analisando (83), percebe-se que o procedimento de ortogonalização da DCM calculada pela metodologia tradicional é eficaz no que diz respeito à eliminação dos erros de ortogonalidade, mas em contra-partida, este efeito é compensado com um aumento nos erros de alinhamento do sistema, os quais podem ser constatados pela alteração no valor do elemento  $c_{13}$ .

De modo a se avaliar a evolução temporal deste efeito indesejado, analisou-se os elementos  $c_{13}$  e  $c_{13}$  das matrizes de transformação de coordenadas obtidas pela metodologia tradicional, pela

sua correspondente ortogonalizada e pela metodologia alternativa, para diversos tempos de amostragem. Os resultados são apresentados nas Fig. 1 e 2:

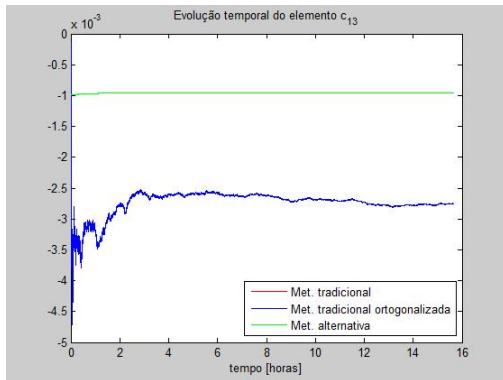


Figura 1: Evolução temporal do elemento  $c_{13}$ .

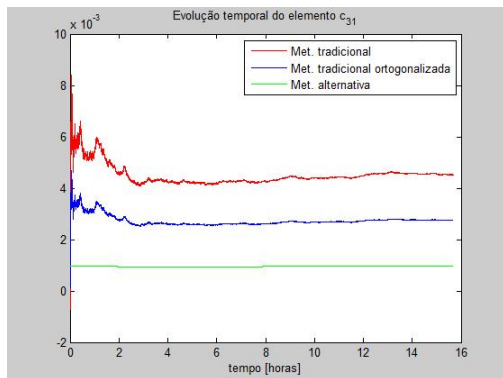


Figura 2: Evolução temporal do elemento  $c_{31}$ .

Analisando as Fig.1 e 2, observa-se que o processo de ortogonalização resulta em um compromisso entre erros de ortogonalidade e erros de alinhamento. A correção dos erros de ortogonalidade, que se traduz na redução do valor do elemento  $c_{31}$  implica em se alterar também o valor do elemento  $c_{13}$ , resultando em maiores erros de alinhamento.

Conclui-se, portanto, que a ortogonalização da DCM obtida pela metodologia tradicional, não é um processo viável, e não permite a obtenção da mesma DCM calculada pela metodologia alternativa.

## 6 Conclusões

Neste artigo foram apresentados duas diferentes metodologias de auto-alinhamento grosseiro para sistemas de navegação inercial solidários. A diferença entre elas consiste, basicamente, numa diferente escolha da tríade de vetores a serem utilizados nos cálculos, o que resulta em diferentes fórmulas de propagação de erros para a matriz de transformação de coordenadas obtida. Enquanto

uma metodologia contribui para a redução dos erros de normalidade, a outra reduz os erros de alinhamento e elimina os de ortogonalidade, sendo portanto, considerada superior à primeira.

O objetivo deste artigo foi o de verificar se um eventual procedimento de ortogonalização da matriz de transformação de coordenadas obtida pela primeira metodologia conduziria à obtenção da mesma matriz de transformação de coordenadas obtida pela segunda metodologia.

Como pode-se concluir, este processo de ortogonalização não permite se obter a mesma DCM, pois, embora os erros de ortogonalidade existentes na primeira DCM sejam apropriadamente eliminados, este efeito é compensado por um aumento nos erros de alinhamento do sistema.

## Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à Fundep, Fundação de Desenvolvimento da Pesquisa, pelo apoio financeiro.

## Referências

- Bar-Itzhack, I. Y. and Meyer, J. (1976). On the convergence of iterative orthogonalization processes, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems* **12**(2): 146–151. DOI: [10.1109/TAES.1976.308289](https://doi.org/10.1109/TAES.1976.308289)
- Britting, K. R. (1971). *Inertial Navigation Systems Analysis*, John Wiley & Sons, Inc.
- Farrel, J. and Barth, M. (1999). *The Global Positioning System & Inertial Navigation*, McGraw-Hill Companies, Inc.
- Jekeli, C. (2000). *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*, Walter de Gruyter GmbH & Co.
- Jiang, Y. F. (1998). Error analysis of analytic coarse alignment methods, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **34**(1): 334–337. DOI: [10.1109/7.640292](https://doi.org/10.1109/7.640292)
- Savage, P. G. (2007). *Strapdown Analytics*, Strapdown Associates, Inc.
- Shimelevich, L. and Naor, R. (1996). New approach to coarse alignment, *IEEE Position Location and Navigation Symposium*, pp. 324–327. DOI: [10.1109/PLANS.1996.509095](https://doi.org/10.1109/PLANS.1996.509095)
- Titterton, D. H. and Weston, J. L. (2004). *Strapdown Inertial Navigation Technology*, Institution of Electrical Engineers.
- Zhao, H., Shang, H., Wang, Z. and Jiang, M. (2011). Comparison of initial alignment methods for SINS, *8th World Congress on Intelligent Control and Automation*.