Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Derivada em escalas temporais sobre a derivada fracionária conforme T^α de Khalil

Luciano Barbanti[1]
Departamento de Matemática, Faculdade de Engenharia, UNESP, Ilha Solteira, SP
Sacha Lucien Moser Ferreira[2]
Departamento de Matemática, Faculdade de Engenharia, UNESP, Ilha Solteira, SP
Antonio Marcos Dias Freitas[3]
Departamento de Física e Química, Faculdade de Engenharia, UNESP, Ilha Solteira, SP

1 Introdução

Neste artigo lidamos com derivadas fracionárias conformes e em escalas temporais. Vamos introduzi-las.

As derivadas não-inteiras são objeto de estudo desde a época do surgimento do Cálculo Diferencial no século XVIII [1]. A teoria continuou a ser desenvolvida pelos séculos seguintes como um campo de bons argumentos matemáticos, até que nos últimos 30 anos houve um "boom" de teoria, devido à sua eficiência em aplicações principalmente nas diversasáreas tecnológicas [2].

Recentemente têm sido propostas novas formulações de derivadas fracionárias na forma de limites do tipo quociente de Newton modificado. As mais recentes são as derivadas fracionárias conformes T^α de Khall e f^α de Katugampola [4].

Com o intuito de unificar o estudo das dinâmicas para sistemas contínuos e discretos foram introduzidas no trabalho de S. Hilger as escalas temporais. A aplicação à dinâmica de sistemas foi sendo praticamente desenvolvida por M. Bohner. Uma escala temporal $\mathbb{T}$ é um subconjunto fechado não vazio de números reais. Os operadores fundamentais na Teoria são os operadores:

$$\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T}; s > t\} \text{ e } \rho(t) = sup\{s \in \mathbb{T}; s < t\}$$

Definimos o operador $\mu(t) = \sigma(t) - t$.

A derivada $D^\Delta f$ (ou f^Δ) é o operador definido em termos da aproximação linear local:

$$D^\Delta f(t) = \begin{cases} \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)} & \text{se } \sigma(t) \neq t \\ f'(t) & \text{se } \sigma(t) = t \end{cases}$$

[1]barbanti@mat.feis.unesp.br
[2]sachamoser78@gmail.com
[3]marcos.amdf87@gmail.com

D^{Δ} é chamado derivada delta de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2 Resultados principais

Neste trabalho estaremos definindo uma derivada em escalas temporais $D^{\Delta}_{\alpha} f$ referente à derivada fracionária T^{α} de Khalil para $0 < \alpha < 1$.

$$\mathbb{T}^{\alpha} f = lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon} \tag{1}$$

Observe-se que ao definirmos uma função g deste modo

$$t + \epsilon t^{1-\alpha} = \psi(t, \alpha) \quad \text{para} \quad \psi \neq 0 \quad \text{e} \quad \epsilon = (\psi(t, \alpha) - t) \cdot g(t)$$

teremos $g(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ para $0 < \alpha < 1$.

Então poderemos definir para este caso uma derivada em escalas temporais $\mathbb{T}$ seguindo a definição $D^{\Delta} f$ (ou f^{Δ}) denotando por $\psi(t, \alpha) = \delta(t)$ (o operador sucessor)

$$D^{\Delta}_{\alpha} f(t) = \begin{cases} lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon} & \texttt{se} \delta(t) \neq t \\ \frac{1}{g(t)} \frac{f(\delta(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{1}{t^{1-\alpha}} f^{\Delta}(t) & \texttt{se} \delta(t) = t \end{cases}$$

Obs: Será imediata a identidade $f^{\Delta} = D^{\Delta} f = D^{\Delta}_{1} f$, extrapolando do intervalo (0,1).

3 Conclusão

Após definirmos D^{Δ}_{α} só nos resta em trabalhos futuros aplicar esta teoria a sistemas de evolução.

Referências

[1] M. Bohner and A. Peterson, Dynamic equations on time Scales, Birkhauser Boston, (2001).

[2] S. Hilger, Analysis on measure chains: a unified approach to continuous and discrete calculus, Results Math, vol. 18, 18–53, (1990), DOI: 10.1007/BF03323153.

[3] U.N. Katugampola, New approach to generalized fractional derivatives, B. Math. Anal. App., vol. 6, No. 4, 1–15, (2014), arXiv: 1106.0965.

[4] R.M.A. Khalil Horani, A. Yousef and M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, J. Comput. Appl. Math, vol. 264, 65–70, (2014), DOI: 10.1016/j.cam.2014.01.002.

[5] A. Kilbas, M.H. Srivastava and J.J. Trujillo (Eds.), Theory and Application of Fractional Differential Equations, Elsevier, (2006).

[6] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press: San Diego CA, (1999).