Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo de algumas bolas no espaço $\mathbb{R}^n$

Saulo Alves de Araujo[1]
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG
Angela Leite Moreno[2]
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG

1 Introdução

Sejam $p, q \in (1, \infty)$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definamos a função $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ dada por

$$\|\cdot\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p},$$

cuja distância induzida pela norma $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ dada por $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$.

E a função $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ dada por

$$\|\cdot\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\},$$

cuja distância induzida pela norma $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ é dada por $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$

No presente trabalho, primeiramente a presentamos os resultados necessários para provar que d_p é de fato uma métrica e, em seguida apresentamos um resultado que relaciona estas métricas através das bolas.

Lema 1.1 (Desigualdade de Young (ou Desigualdade Elementar))**.** *Suponhamos que a, b, p e q sejam números reais positivos e tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 1.2 (Desigualdade de Holder)**.** *Suponhamos que $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ então*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{1/q}.$$

[1]mbernardes@uftpr.edu.br
[2]aleitemoreno@gmail.com

Lema 1.3 (Desigualdade de Minkowsky). *Suponhamos que* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *com* $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ *e* $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ *então*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p}.$$

Teorema 1.1. $(\mathbb{R}^n, d_p)$ *é um espaço métrico.*

Teorema 1.2. $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ *é um espaço métrico.*

Teorema 1.3. *No espaço* $\mathbb{R}^n$ *temos que*

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p .$$

Demonstração: Seja $x \in \mathbb{R}^n$ então existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\|x\|_\infty = |x_k|$ daí

$$\begin{aligned} \left|\|x\|_p - \|x\|_\infty\right| &= \left|\left(\sum_{n=1}^{n} |x_n|^p\right)^{1/p} - |x_k|\right| \leq \left|(n\,|x_k|^p)^{1/p} - |x_k|\right| \\ &= \left|n^{1/p}\,|x_k| - |x_k|\right| = \left|\left(n^{1/p} - 1\right)|x_k|\right| \\ &= \left|\left(n^{1/p} - 1\right)|x_k|\right| = \left|n^{1/p} - 1\right| |x_k| \end{aligned}.$$

daí, fazendo $p \to \infty$ segue que $\left|\|x\|_p - \|x\|_\infty\right| \to 0$ e, portanto

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p . \qquad \blacksquare$$

Para uma visualização geométrica note que a métrica $\|\cdot\|_p$ define uma bola centrada em x_0 que altera de acordo com p varia, considerando $n = 2$ podemos ver que as bolas com as normas p vão se aproximando da o comportamento da bola do máximo.

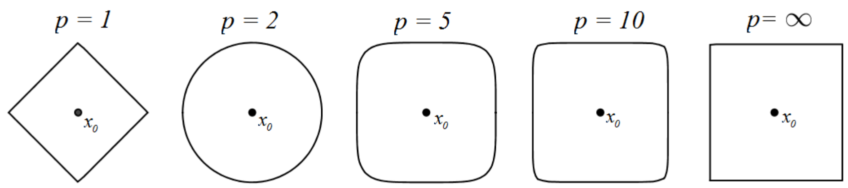

Figura 1: Bolas centradas em x_0 conforme p aumenta.

Com este estudo foi possível ver que um mesmo conjunto assumindo métricas diferentes pode resulta em espaços métricos diferentes, possuindo características distintas, como a completude do espaço, que irá depender da métrica para obter um resultado.

Agradecimentos

Agradecemos à FAPEMIG e à UNIFAL-MG.

Referências

[1] J. R. Munkres. *Topology*, 2 ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

