Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Completude no Espaço de Funções

Saulo Alves de Araujo[1]
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG
Angela Leite Moreno[2]
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG

1 Introdução

Os estudos na disciplina de espaços métricos geralmente se concentram em casos usais como $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$. Porém esses casos nem sempre são suficientes para aplicações, sendo necessário utilizar espaços mais complexos. Este trabalho pretende apresentar e discutir sobre as diferenças de duas métricas no espaço de funções reais contínuas definidos em um intervalos $[a, b]$, discutindo a completude deste espaço em relação à essas métricas.

2 Espaços de funções

Definição 2.1. *Suponhamos que X seja um conjunto não vazio. Diremos que uma função $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$ é uma distância ou métrica sobre X se as seguintes propriedades forem satisfeitas:*

(i) *Para quaisquer $a, b \in M$, temos que $\rho(a, b) = 0$ se, e somente se, $a = b$.*

(ii) Simetria: *para quaisquer $a, b \in M$ temos que$\rho(a, b) = \rho(b, a)$.*

(iii) Desigualdade Triangular: *para quaisquer $a, b, c \in M$ temos que*

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b).$$

Diremos que um par ordenado (M, ρ) é um espaço métrico se M for um conjunto e $\rho : M \times M \to [0, +\infty)$ for uma métrica sobre M.

Exemplo 2.1. *Sejam a e b números reais com $a < b$ e $\mathcal{C}[a, b]$ o conjunto de todas as funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ e $\rho_0 : \mathcal{C}[a, b] \times \mathcal{C}[a, b] \to [0, \infty)$ dada por:*

$$\rho_0(x, y) = \max \{|x(t) - y(t)| : a \leq t \leq b\}.$$

temos que $(\mathcal{C}[a, b], \rho_0)$ é um espaço métrico.

[1]sauloalvesaraujo2010@hotmail.com
[2]aleitemoreno@gmail.com

Exemplo 2.2. *Sejam a e b números reais com $a < b$ e $\mathcal{I}[a,b]$ o conjunto de todas as funções Riemann Integráveis de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ e $\rho_1 : \mathcal{I}[a,b] \times \mathcal{I}[a,b] \to [0,\infty)$ dada por*

$$\rho_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|dt.$$

Temos que ρ_1 não é uma métrica em $\mathcal{I}[a,b]$, mas é uma métrica em $\mathcal{C}[a,b] \subset \mathcal{I}[a,b]$.

Mostraremos apenas que ρ_1 não é uma métrica em $\mathcal{I}[a,b]$, para isto tomemos $c \in [a,b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definamos

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & x = c, \\ 0, & x \neq c. \end{cases}$$

Observemos que f é integrável em $[a,b]$ e que $\int_a^b f = 0$. Tomando $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 0$. Temos que $f \neq 0$ em $[a,b]$, mas

$$\rho_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt = 0.$$

Logo ρ_1 não é métrica. ■

Definição 2.2. *Consideremos um espaço métrico (X,d). Uma sequência (x_n) em um espaço métrico é chamada de sequência de Cauchy quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m,n > n_0$ então $d(x_m,x_n) < \varepsilon$.*

Definição 2.3. *Um espaço métrico se diz completo quando toda sequência de Cauchy deste espaço converge.*

Exemplo 2.3. *$(\mathcal{C}[a,b],\rho_0)$ é completo.*

Porém se alterarmos a métrica podem haver alterações no espaço. Para isto basta tomarmos o mesmo espaço acima com uma outra métrica.

Exemplo 2.4. *$(\mathcal{C}[a,b],\rho_1)$ não é completo.*

De fato, basta consideremos a sequência:

$$f_n(x) = \begin{cases} a, & \text{se } -b \leq x \leq \frac{a}{n}, \\ nx, & \text{se } \frac{a}{n} < x \leq \frac{b}{n}, \\ b, & \text{se } \frac{b}{n} < x \leq b \end{cases}$$

essa sequência é de Cauchy, porém ela é converge para uma função

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{se } -b \leq x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ b, & \text{se } 0 < x \leq b \end{cases}$$

que não é contínua, portanto o espaço $\mathcal{C}[a,b]$ não é completo com esta métrica.

Agradecimentos

Agradecemos à UNIFAL-MG e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), Brasil.

Referências

[1] J. R. Munkres. *Topology*, 2 ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

