Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Equações de Riccati e Grupos de Lie

Alisson da Silva Pinto[1]
Patrícia Nunes da Silva[2]
Cristiane Oliveira de Faria[3]
Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, IME, UERJ, Rio de Janeiro, RJ
André Luiz Cordeiro dos Santos[4]
Departamento de Matemática, CEFET-RJ, Rio de Janeiro, RJ

1 Introdução

Sophus Lie desenvolveu sua teoria com o objetivo de unificar e estender métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias através de teoria de grupos. Um **Grupo de Lie** é um grupo G com estrutura de variedade diferenciável [2], munido de uma operação de produto

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \rightarrow & G \\ (g,h) & \mapsto & gh \end{array}$$

e inversa

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

tal que ambas aplicações são diferenciáveis. Para resolver equações diferenciais ordinárias, determinam-se grupos de transformações para os quais a equação é invariante [3]. Um grupo de simetriais de uma equação diferencial é um grupo de transformações que leva uma solução da equação em outras soluções, no espaço onde estão contidas [4]. As equações diferenciais ordinárias no grupo são os elementos da *álgebra de Lie* [5], satisfazendo uma propriedade simétrica do grupo. As soluções de tais equações formam os elementos do grupo.

A equação de **Riccati** é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, não-linear, da forma:

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2, \tag{1}$$

onde $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ são funções reais. As equações de Riccati surgem em diversas áreas da física e química quântica e da matematica, tais como a aproximação WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin, referência aos físicos que desenvolveram o método), que consiste de

[1]alisson.pinto@gmail.com
[2]nunes@ime.uerj.br
[3]cofaria@ime.uerj.br
[4]andreluiz.cordeiro@gmail.com

um método utilizado em física matemática para encontrar solução de equações diferenciais lineares com coeficientes variando no espaço; e na teoria de *supersimetria*, em física de partículas, onde partículas elementares de uma determinada classe (bósons) são associadas às de uma outra classe (férmions), além de outros temas de física teórica.

2 Motivação e Colocação do Problema

A equação de Gross-Pitaesvkii (GPE, do inglês *Gross-Pitaevskii equation*) descreve um condensado de Bose-Einstein para temperaturas muito baixas, próximas ao zero absoluto. Ela é dada por

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x},t) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},t) + NU_0\left|\psi(\mathbf{x},t)\right|^2\psi(\mathbf{x},t), \tag{2}$$

sendo $\psi(\mathbf{x},t)$ a função de onda macroscópica. $\mathbf{x} = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$, ∇ representa o operador gradiente, tal que $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \Delta$, m é a massa atômica, $\hbar$ é a constante de Planck, N é o número de átomos no condensado e U_0 descreve a interação entre os átomos no condendado. Em [1] é apresentada uma aplicação das equações de Riccati na solução da GPE (2).

Nosso objetivo é estudar a aplicação da teoria de grupos de Lie à resolução de equações diferenciais e também analisar o método de resolução para equações de Riccati proposto em [1] sob a perspectiva dos grupos de Lie, por meio de conceitos de variedades, espaços topológicos, dentre outros temas que servem de base teórica no entendimento da teoria de grupos de Lie. Além disso, com o propósito de comparação, o método de diferenças finitas será aplicado na obtenção da solução da GPE.

Referências

[1] A. Al Bastami, M. R. Belić and N. Z. Petrovic. Special solutions of the Riccati equation with applications to the Gross-Pitaevskii nonlinear PDE, *EJDE*, 2010(66):1-10, 2010, ISSN: 1072-6691.

[2] B. C. Hall. Lie Groups, Lie Algebras and Representation, In *Graduate texts in mathematics*, Springer, volume 222, 2015.

[3] R. V. Navarro, Solución de ecuaciones diferenciales mediante grupos de simetría, Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática, Universidad Industrial de Santander, (2010).

[4] P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, In *Graduate texts in mathematics*, Springer, volume 107, 2000.

[5] L. A. B. SanMartin. *Grupos de Lie*, 2014. Site: http://www.ime.unicamp.br/ smartin/cursos/grupolie-2013/gruplie0.pdf

