

EVOLUÇÃO DO MOVIMENTO ROTACIONAL LIVRE DE TORQUES EXTERNOS NAS REGIÕES DE LIBRAÇÃO E CIRCULAÇÃO

M.A.R.ALMEIDA¹, M.C.ZANARDI¹, W. R. SILVA², R. E. S. CABETTE³

1. Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP
Caixa Postal 205 CEP 12.516-410 - Guaratinguetá, SP, BRASIL

E-mails: mari.matematica@yahoo.com.br, cecilia@feg.unesp.br

2. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Caixa Postal 515 CEP 12.227-010 - São José dos Campos, SP, BRASIL

E-mails: reis.william@gmail.com

3. Centro Universitário Salesiano de São Paulo - UNISAL
CEP 12.600 - 100, Lorena, SP, BRASIL

E-mails: recabette@uol.com.br

Abstract — In this paper, the rotational motion without external torques is analyzed in order to investigate the temporal behavior of the variables that describe the motion in the regions of libration and circulation around the equilibrium points. To describe the rotational motion of the satellite are used Andoyer canonical variables. Applications are made to satellite with distinct principal moments of inertia. Three equilibrium points are determined, two points are unstable and one steady. In the temporal behavior there are periodic variations in a angle variable and a metric variable and there is a linear variation for the angular variable directly related to the rotation of the satellite. The results obtained are important for the analysis of rotational motion when the external torques are included in the equations of motion.

Keywords — Celestial mechanics, rotational motion, andoyer variables, equilibrium points.

Resumo — O movimento rotacional livre de torques externos é aqui analisado com o objetivo de investigar o comportamento temporal das variáveis que descrevem o movimento nas regiões de libração e circulação ao redor dos pontos de equilíbrio. Para descrever o movimento rotacional do satélite são utilizadas as variáveis canônicas de Andoyer. Aplicações são realizadas para um satélite de médio porte com momentos principais de inércia distintos. São determinados 3 pontos de equilíbrio, sendo dois pontos instáveis e apenas um estável. No comportamento temporal verificam-se variações periódicas em uma variável angular e uma variável métrica e uma variação linear para a variável angular diretamente relacionada com a rotação do satélite. Os resultados obtidos são importantes para a continuidade da análise do movimento rotacional quando os torques externos são incluídos nas equações do movimento.

Palavras-chave — Mecânica Celeste, movimento rotacional, variáveis de Andoyer, pontos de equilíbrio.

1. Introdução

Este trabalho enfoca o movimento rotacional de um satélite artificial na ausência de torques externos, analisando as regiões de libração e circulação ao redor dos pontos de equilíbrio das equações do movimento. Aplicações são realizadas para um satélite de médio porte com momentos principais de inércia distintos. Para descrever o movimento rotacional do satélite são utilizadas as variáveis canônicas de Andoyer. Tais variáveis, além do fato de possuírem significado físico, são convenientes para aplicação de métodos de teoria de perturbação, quando se deseja fazer uma abordagem analítica ao movimento rotacional. Essas variáveis também são convenientes para a aplicação de métodos de estabilidade para sistemas Hamiltonianos.

Considerando os sistemas de coordenadas do satélite: sistema de eixos principais de inércia $Oxyz$

(denominando sistema principal), sistema equatorial $OXYZ$ (com eixos coincidentes com o equador terrestre, denominado sistema do satélite) e o sistema do momento angular $Ox_my_mz_m$ (eixo Oz_m coincide com a direção do momento angular de rotação do satélite L_2).

As variáveis de Andoyer (Kinoshita, 1972) para descrever o movimento rotacional do satélite, são aqui definidas:

- As variáveis angulares ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 são ângulos que relacionam os diferentes sistemas de referência envolvidos e estão apresentadas na Figura 1;

- As variáveis métricas: J é o módulo do vetor momento angular de rotação \vec{L}_2 , L é a projeção de \vec{L}_2 no eixo z no sistema principal ($L = J \cos \ell_2$) e l é a projeção de \vec{L}_2 no eixo equatorial Z ($l = J \sin \ell_2$).

Os desenvolvimentos foram realizados com o auxílio dos softwares MATLAB e MATHEMATICA.

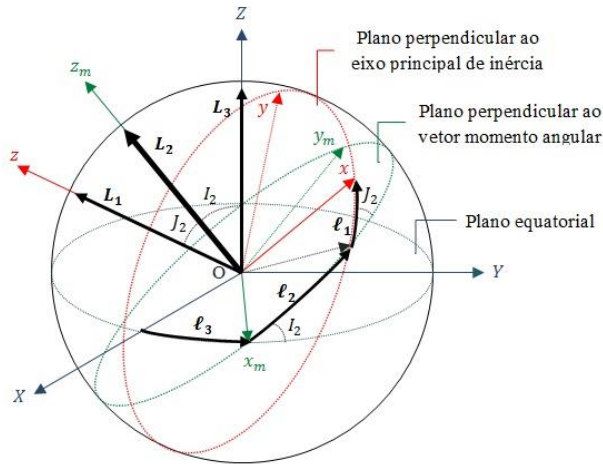


Figura 1 – Variáveis de Andoyer

A Hamiltoniana do movimento rotacional livre de torques externos (MRLTE) para satélites não simétricos (com momentos principais de inércia distintos $A \neq B \neq C$, sendo A, B, C respectivamente os momentos principais em torno dos eixos x, y, z do satélite) é expressa em termos das variáveis de Andoyer por (Kinoshita, 1972) e (Zanardi, 1986):

$$F = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2 l_1}{A} + \frac{\cos^2 l_1}{B} \right] (L_2^2 - L_1^2) + \frac{L_1^2}{2C} \quad (1)$$

Com as equações do movimento dadas por:

$$\begin{cases} \frac{dl_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i}, \\ \frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial l_i}; \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

2. Equações do Movimento e Pontos de Equilíbrio

O estudo da estabilidade é feito através dos pontos de equilíbrio, analisando o plano de fase (l_1, L_1) , sendo que: $0 \leq l_1 \leq \pi$ e $-L_2 \leq L_1 \leq L_2$, a partir das equações do movimento (2), pelas quais tem-se:

$$\dot{L}_2 = \dot{L}_3 = \dot{l}_3 = 0 \quad (3)$$

$$\dot{l}_1 = -\left(\frac{\sin^2 l_1}{A} + \frac{\cos^2 l_1}{B} \right) L_1 + \frac{L_1}{C} \quad (4)$$

$$\dot{L}_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) (L_2^2 - L_1^2) \sin 2l_1 \quad (5)$$

$$\dot{l}_2 = \left(\frac{\sin^2 l_1}{A} + \frac{\cos^2 l_1}{B} \right) L_2 \quad (6)$$

Observa-se assim, que quando não estão sendo considerados os torques externos, as variáveis métricas L_2 e L_3 e a variável angular l_3 permanecem constantes.

Os pontos de equilíbrio são obtidos das equações de movimento (4), (5) e (6) que resultam em:

$$1) \quad l_1 = 0, L_1 = 0; \quad (7)$$

$$2) \quad l_1 = \frac{\pi}{2}, L_1 = 0; \quad (8)$$

$$3) \quad l_1 = \pi, L_1 = 0; \quad (9)$$

Para analisar o espaço de fase (l_1, L_1) é preciso determinar a Matriz Hessiana da Hamiltoniana do movimento rotacional livre de torques externos que é definida como:

$$P_{MRLTE} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial l_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_1 \partial L_1} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L_1 \partial l_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_1^2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

de modo que a partir de (1), suas derivadas parciais são expressas como:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial l_1^2} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) (L_1^2 - L_2^2) \cos 2l_1 \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial l_1 \partial L_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial L_1 \partial l_1} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) L_1 \sin 2l_1 \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L_1^2} = \frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l_1}{A} - \frac{\cos^2 l_1}{B} \quad (13)$$

A partir do determinante da matriz Hessiana ($\Delta = \det(P_{MRLTE})$) e de seus elementos é possível determinar se os pontos de equilíbrio são um máximo, um mínimo relativo ou ponto de sela (Swokowski, 1995). A análise será aqui realizada considerando a relação $C < B < A$ entre os momentos principais de inércia. Outras análises para os planos de fase (l_1, L_1) envolvendo outras relações entre os momentos principais de inércia foram realizadas por DEPRIT (1967) e Cabette (2006).

3. Análise dos Pontos de Equilíbrio para Momentos Principais de Inércia $C < B < A$

Considerando o caso em que os momentos principais de inércia o momento angular L_2 e sua projeção L_1 assumem os seguintes valores:

$$A = 3,94 * 10^5 \text{ Kg m}^2$$

$$B = 3,33 * 10^5 \text{ Kg m}^2$$

$$C = 1,03 * 10^5 \text{ Kg m}^2$$

$$L_1 = 1 * 10^4 \text{ Kg m}^2/\text{s}$$

$$L_2 = 9.3707 * 10^3 \text{ Kg m}^2/\text{s}$$

os quais são similares aos dados do satélites americano PEGASUS (Zanardi, 1986), pode-se analisar cada ponto de equilíbrio:

1) Para $l_1 = 0, L_1 = 0$ e $l_1 = \pi, L_1 = 0$ obtém-se:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L_1 \partial \ell_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial L_1 \partial \ell_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \ell_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L_1^2} > 0, \quad \Delta < 0 \quad (14)$$

que são definidos como pontos de sela (Swokowski, 1995).

A Hamiltoniana nesses pontos assume o seguinte valor

$$F_B = \frac{L_2^2}{2B} = 141,9780 \text{ Kg m}^2/\text{s}^2$$

E corresponde a uma rotação em torno do eixo principal de inércia Oy, caracterizando pontos instáveis.

2) Para $\ell_1 = \frac{\pi}{2}$, $L_1 = 0$ obtém-se:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L_1 \partial \ell_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial L_1 \partial \ell_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \ell_1^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L_1^2} > 0, \quad \Delta > 0 \quad (15)$$

que é definido como um ponto mínimo relativo, caracterizando um ponto de equilíbrio estável na ausência de torques externos.

A Hamiltoniana nesse ponto assume o seguinte valor

$$F_A = \frac{L_2^2}{2A} = 119,8594 \text{ Kg m}^2/\text{s}^2$$

E corresponde a rotação em torno do eixo principal de inércia Ox.

Na Figura 2 é apresentado o comportamento da Hamiltoniana F em função de (l_1, L_1) , na qual é possível visualizar o ponto de mínimo relativo $(l_1, L_1, F_A) = (\frac{\pi}{2}, 0, 119.86)$ e os pontos de sela $(l_1, L_1, F_B) = (0, 0, 141.98)$ e $(l_1, L_1, F) = (\pi, 0, 141.98)$.

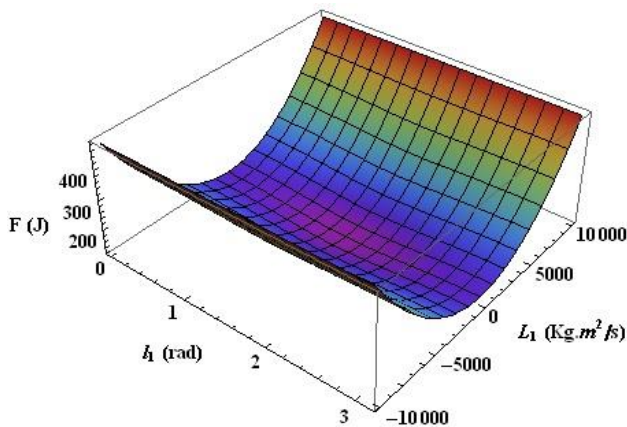


Figura 2 – Comportamento da Hamiltoniana do MRLTE para $C < B < A$ (Silva, 2011).

A Figura 3 apresenta o espaço de fase (ℓ_1, L_1) . Na análise deste plano de fase, observa-se que a Hamiltoniana assume valores entre.

$$F_A \leq F \leq F_B$$

$$F_B \leq F \leq F_C$$

onde F_C é um caso especial quando $L_1 = \pm L_2$, que corresponde a uma rotação em torno do eixo Oz, com a Hamiltoniana dada por:

$$F_C = \frac{L_2^2}{2C} = 459,3311 \text{ Kg m}^2/\text{s}^2$$

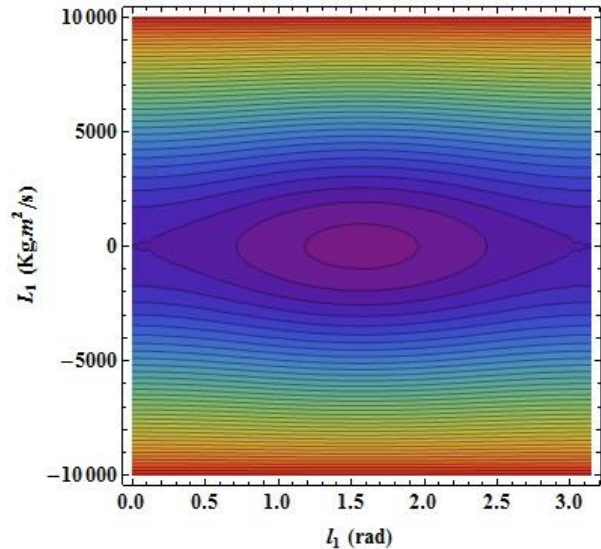


Figura 3- Espaço de fase (ℓ_1, L_1) para $C < B < A$. O ponto $(l_1, L_1) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ corresponde à hamiltoniana F_A , a separatriz corresponde à hamiltoniana F_B e a Hamiltoniana F_C corresponde ao caso de $L_1 = L_2$.

Quando a Hamiltoniana assume valores entre F_A e F_B ocorrem librações em torno do ponto de equilíbrio estável $(l_1, L_1) = (\frac{\pi}{2}, 0)$; a separatriz ocorre quando $F = F_B$ e quando a Hamiltoniana assume valores entre F_B e F_C ocorrem circulações em torno do ponto de equilíbrio estável.

4. Análise das regiões de circulação

A seguir são analisados os comportamentos temporais de l_1 , l_2 e L_1 para algumas regiões de circulação, correspondendo à $F_B \leq F \leq F_C$ para um intervalo de tempo de 500.000 seg. São considerados três casos de condições iniciais distintos:

Caso I:

$$l_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}; \quad l_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \text{e} \quad L_1 = 2000 \text{ kgm}^2/\text{s} \quad (16)$$

Caso II:

$$l_1 = 1 \text{ rad}; \quad l_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \text{e} \quad L_1 = 2000 \text{ kgm}^2/\text{s} \quad (17)$$

Caso III:

$$l_1 = 1 \text{ rad}; \quad l_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \text{e} \quad L_1 = 7000 \text{ kgm}^2/\text{s} \quad (18)$$

As Figuras 4, 5 e 6, apresentam respectivamente o comportamento temporal da variável l_1 , l_2 e L_1 para os casos I, II e III.

Observa-se na Figura 4 um comportamento periódico para a variável l_1 , sendo que o período do caso III é muito maior do que dos casos I e II. Na Figura 5 é mostrada uma variação linear para a variável angular l_2 , com diferenças não significativas entre os três casos. Na Figura 6 observa-se um comportamento periódico da variável L_1 , nos casos I e II, e uma variação menos para o caso III.

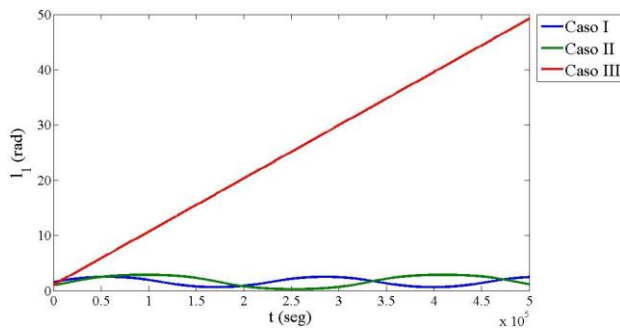


Figura 4 – Comportamento temporal de l_1 , para região de circulação nos casos I, II e III.

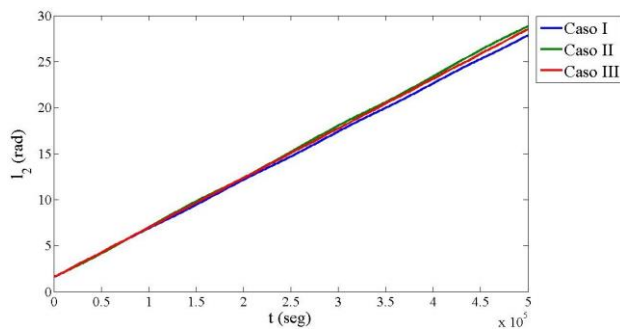


Figura 5 – Comportamento temporal de l_2 , para região de circulação nos casos I, II e III.

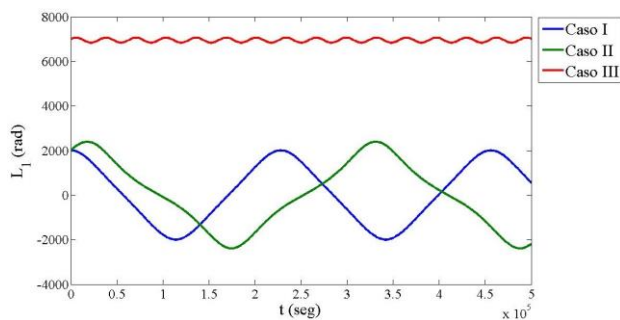


Figura 6 – Comportamento temporal para L_1 na região de circulação nos casos I, II e III.

Pela Figura 6, observa-se que quando os valores de L_1 se aproximam do valor de L_2 (correspondendo a $\theta_2 = 0^\circ$), as amplitudes das variações periódicas diminuem. Tal comportamento é justificado pelo coeficiente do termo periódico na equação do movimento de L_1 , dada pela equação (5).

Na Figura 4, observam-se pequenas variações periódicas na variável angular l_1 quando L_1 é bem menor do que L_2 (casos I e II) e uma variação linear quando L_1 se aproxima de L_2 (caso III). Esta variação linear se justifica pelo fato da pequena variação de L_1 no caso III, o que acarreta em variação linear em l_1 (associada ao termo L_1/C) que prevalece sob o outro termo da equação (4).

5. Análise da região de libração

A seguir são analisados os comportamentos temporais de l_1 , l_2 e L_1 para algumas regiões de libração, correspondendo à $F_A \leq F \leq F_B$ para um intervalo de tempo de 500.000 seg. São considerados três casos de condições iniciais distintos:

Caso IV:

$$l_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}; l_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad e } L_1 = 500 \text{ kgm}^2/\text{s} \quad (19)$$

Caso V:

$$l_1 = 1 \text{ rad}; l_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad e } L_1 = 1000 \text{ kgm}^2/\text{s} \quad (20)$$

Caso VI:

$$l_1 = 1 \text{ rad}; l_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad e } L_1 = 1500 \text{ kgm}^2/\text{s} \quad (21)$$

Nas Figuras 7, 8 e 9, respectivamente estão apresentados os comportamentos temporais das variáveis l_1 , l_2 e L_1 para os casos IV, V e VI.

Pelas Figuras 7 e 9 observa-se que as variáveis l_1 e L_1 assumem um comportamento periódico, não havendo muitas diferenças entre os casos. As amplitudes do movimento aumentam com o aumento de L_1 .

Pela variável l_2 varia linearmente, também não havendo diferenças significativas entre os casos, como na análise da região de circulação. Isso se justifica pelo fato da região de libração ser muito pequena para este satélite.

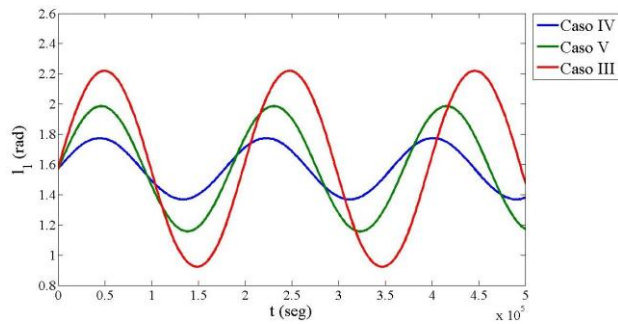


Figura 7 – Comportamento temporal para l_1 na região de libração nos casos IV, V e VI.

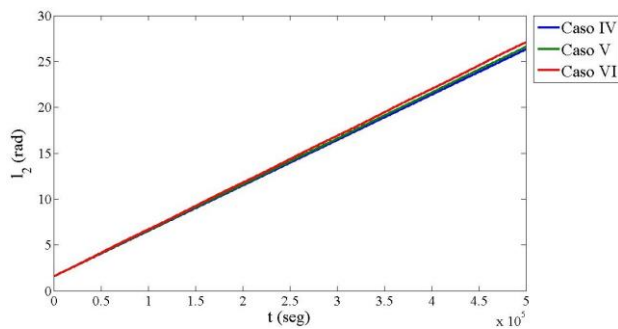


Figura 8 – Comportamento temporal para l_2 na região de libração nos casos IV, V e VI.

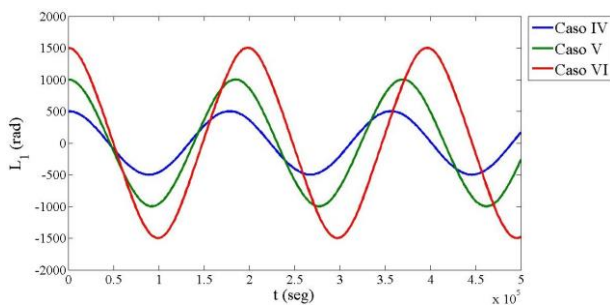


Figura 9 – Comportamento temporal para l_1 na região de libração nos casos IV, V e VI.

6. Conclusão

Neste trabalho foi analisado o movimento rotacional livre de torques externos, descrito pelas variáveis canônicas de Andoyer, com aplicações para um satélite de médio porte com momentos principais de inércia distintos. Pontos de equilíbrio foram determinados, sendo dois pontos instáveis e um ponto estável. O comportamento temporal em regiões de circulação e libração apresentam variações periódicas em uma variável angular e uma métrica e uma variação linear na variável angular diretamente relacionada com a rotação do satélite. Os resultados obtidos são importantes para a continuidade da análise do movimento

rotacional quando os torques externos serão incluídos nas equações do movimento.

7. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do CNPq e da FAPESP (processo no. 2012/21023-6).

8. Referência Bibliográfica

- Cabette, R. E. S.: “Estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais”. Dissertação de doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, (2006).
- Zanardi, M. C.: “Study of the terms of coupling between rotational and translational motion”. *Celes. Mech.* 39(2), 147 – 164, (1986). DOI: [10.1007/BF01230847](https://doi.org/10.1007/BF01230847)
- Silva, W. R.: “Estudo da estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais com variáveis canônicas”. Qualificação de mestrado, Universidade Estadual de São Paulo, Guaratinguetá, (2011)
- Deprit, A. Free Rotation of a Rigid Body Studied in the Phase Plane. *Am. J. Phys.*, v.55, 1967
- Swokowski, E. W.: *Cálculo com Geometria Analítica.* v.I. McGraw-Hill, 1995