Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Sobre uma Classe de Funções Ortogonais

Cleonice F. Bracciali[1]
Depto de Matemática Aplicada, UNESP - Campus de São José do Rio Preto, SP, Brasil
John H. McCabe
School of Mathematics, University of St. Andrews, Reino Unido
Teresa E. Pérez
Depto de Matemática Aplicada, Universidad de Granada, Granada, Espanha
A. Sri Ranga
Depto de Matemática Aplicada, UNESP - Campus de São José do Rio Preto, SP, Brasil

1 Introdução

Apresentaremos uma classe de funções que satisfazem uma propriedade de ortogonalidade e que também satisfazem a uma relação de recorrência de três termos.

Estas funções, que podem ser consideradas com uma extensão dos polinômios ortogonais simétricos no intervalo $[-1,1]$, também têm conexão com polinômios ortogonais no círculo unitário.

2 R-funções

Consideramos Ω_m o espaço de funções reais definidas em $(-1,1)$, dado da seguinte forma: $\Omega_0 \equiv \mathbb{P}_0$ e Ω_m para $m \geq 1$ é tal que se $\mathcal{W}(x) \in \Omega_m$ então,

$$\mathcal{W}(x) = B^{(0)}(x) + \sqrt{1-x^2}\, B^{(1)}(x),$$

onde $B^{(0)}(x) \in \mathbb{P}_m$ e $B^{(1)}(x) \in \mathbb{P}_{m-1}$ satisfaz $B^{(0)}(-x) = (-1)^m B^{(0)}(x)$ e $B^{(1)}(-x) = (-1)^{m-1} B^{(1)}(x)$. $\mathbb{P}_m$ representa o espaço dos polinômios reais de grau no máximo m. Denominamos as funções $\mathcal{W} \in \Omega_m$ por R-funções.

Note que a dimensão do espaço linear Ω_m é $m+1$, e

$$\{1,\ x\sqrt{1-x^2},\ x^2,\ \ldots,\ x^{2n-1}\sqrt{1-x^2},\ x^{2n}\} \qquad \text{e}$$

$$\{\sqrt{1-x^2},\ x,\ x^2\sqrt{1-x^2},\ \ldots,\ x^{2n}\sqrt{1-x^2},\ x^{2n+1}\}$$

formam bases para Ω_{2n} e para Ω_{2n+1}, respectivamente.

[1] cleonice@ibilce.unesp.br

3 R-funções ortogonais

Uma função ψ limitada, não decrescente, com infinitos pontos de aumento em (a,b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, tal que os momentos $\mu_n = \int_a^b x^n d\psi(x),\ n \geq 0$, são finitos é denominada distribuição (medida positiva).

Consideramos ψ uma distribuição definida no intervalo $(-1,1)$ e a sequência de R-funções $\mathcal{W}_m \in \Omega_m, m = 0,1,2,...$, que satisfazem as seguintes condições de ortogonalidade

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \mathcal{W}_{2n}(x)\,\mathcal{W}_{2m}(x)\,\sqrt{1-x^2}\,d\psi(x) = \rho_{2m}\,\delta_{n,m},\\
&\int_{-1}^{1} \mathcal{W}_{2n+1}(x)\,\mathcal{W}_{2m+1}(x)\,\sqrt{1-x^2}\,d\psi(x) = \rho_{2m+1}\,\delta_{n,m},\\
&\int_{-1}^{1} \mathcal{W}_{2n+1}(x)\,\mathcal{W}_{2m}(x)\,d\psi(x) = 0,
\end{aligned}$$

para $n,m = 0,1,2,\ldots$, onde $\delta_{n,m} = 0$ se $n \neq m$ e $\delta_{n,m} = 1$ se $n = m$. Tais funções são chamadas de R-funções ortogonais e satisfazem a relação de recorrência de três termos especial dada por

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_0(x) = \gamma_0, \quad \mathcal{W}_1(x) = (\gamma_1 x - \beta_1\sqrt{1-x^2})\gamma_0,\\
&\mathcal{W}_{m+1}(x) = \left[\gamma_{m+1}x - \beta_{m+1}\sqrt{1-x^2}\right]\mathcal{W}_m(x) - \alpha_{m+1}\mathcal{W}_{m-1}(x), \quad m \geq 1,
\end{aligned}$$

onde $\{\alpha_m\}_{m=2}^{\infty}$, $\{\beta_m\}_{m=1}^{\infty}$ e $\{\gamma_m\}_{m=0}^{\infty}$ são sequências de números reais.

Uma propriedade muito interessante e útil das R-funções ortogonais é que $\mathcal{W}_m(x)$ possui exatamente m zeros distintos no intervalo $(-1,1)$.

Apresentaremos outras propriedades das R-funções ortogonais e sua conexão com polinômios ortogonais no círculo unitário. Mais detalhes e demonstrações destes resultados podem ser encontradas na referência [1].

Agradecimentos

Agradecemos o apoio recebido das agências de fomento FAPESP e CNPq.

Referências

[1] C. F. Bracciali, J. H. McCabe, T. E. Pérez, A. Sri Ranga, A class of orthogonal functions given by a three term recurrence formula, *Mathematics of Computation*, 85:1837–1859, 2016.

