

CÁLCULO DA VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS DE SATÉLITES LUNARES DEVIDO À DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE MASSA DA LUA

MARIA LÍVIA G. T. X. DA COSTA¹, RODOLPHO VILHENA DE MORAES¹, ANTÔNIO F. B. A. PRADO².

1. *Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo – UNIFESP*
 12231-289, São José dos Campos, SP, Brasil
 E-mails: *livia.thibes@gmail.com, rodolpho.vilhena@gmail.com*

2. *Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais- INPE*
 12227-010, São José dos Campos, SP, Brasil
 E-mail: *prado@dem.inpe.br*

Resumo - Neste trabalho, utilizando as equações planetárias de Lagrange, são comparadas as variações de elementos orbitais de satélites lunares devido à distribuição não uniforme de massa da Lua com as variações de elementos orbitais de satélites artificiais terrestres devido à distribuição não uniforme de massa da Terra. Soluções analíticas aproximadas são comparadas com a integração numérica das equações para algumas simulações.

Palavras-chave – Astrodinâmica, satélites lunares, potencial gravitacional, elementos orbitais, satélites artificiais.

1 Introdução

Quando se estuda o potencial de um satélite artificial ao redor da Lua utilizando os polinômios de Legendre, observa-se que a ordem de grandeza de alguns coeficientes associados à ordem e grau dos polinômios não são hierarquicamente proporcionais à ordem e grau dos polinômios. Por exemplo, diferente do caso da Terra, a ordem do coeficiente associado ao C_{22} é apenas um décimo menor que o coeficiente associado ao J_2 ; também, como exemplo para a Lua, a ordem de grandeza do coeficiente associado ao J_9 é maior que a ordem de grandeza do coeficiente associado ao J_3 . Isto faz com que o comportamento do movimento orbital de satélites lunares, sob alguns aspectos, seja diferente do comportamento do movimento orbital de satélites artificiais da Terra. Na Tabela 1 são fornecidos alguns valores de tais coeficientes (Lemoine et al., 1998 e Chen et al., 2005).

Tabela 1. Valores de coeficientes harmônicos para a Terra e para a Lua.

	Terra	Lua
$C_{20}=-J_2$	$1,082516.10^{-3}$	$2,032337.10^{-4}$
C_{22}	$1,57443228.10^{-6}$	$2,2357.10^{-5}$
$C_{30}=-J_3$	$-2,532656026.10^{-6}$	$8,47590.10^{-6}$
$C_{40}=-J_4$	$-1,655470.10^{-6}$	$-9,5919310.10^{-6}$
$C_{50}=-J_5$	$-2,272959251.10^{-7}$	$7,15409.10^{-7}$
$C_{60}=-J_6$	$5,406524138.10^{-7}$	$-2,17747.10^{-5}$
$C_{70}=-J_7$	$-3,523597646.10^{-7}$	$-1,35777.10^{-5}$
$C_{80}=-J_8$	$-2,047991918.10^{-7}$	$-9,67487.10^{-6}$
$C_{90}=-J_9$	$-1,206168362.10^{-7}$	$1,54960.10^{-5}$

2 Potencial Gravitacional

Consideremos um satélite artificial, exclusivamente sob a atração gravitacional de um corpo central, orbitando um corpo com distribuição não uniforme de massa. O potencial gravitacional considerado, expresso em termos de coeficientes harmônicos esféricos, é dado por (Morando, 1974):

$$U = \frac{\mu}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n a_e^n}{r^n} P_n(\cos \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{J_{n,m} a_e^n}{r^n} P_{n,m}(\cos \phi) \cos m(\lambda - \lambda_{n,m}) \right) \quad (1)$$

em que n e m são, respectivamente, o grau e a ordem do polinômio associado de Legendre, μ é a constante gravitacional, a_e é o raio equatorial do corpo central considerado. $P_{n,m}$ são os polinômios associados de Legendre. r é o raio vetor (distância entre o satélite e o centro de massa do corpo com distribuição não uniforme de massa). O ângulo ϕ é a latitude do satélite, λ é a longitude; J_n , $J_{n,m}$ e $\lambda_{n,m}$ são características do corpo central. Tal potencial pode ser expresso em termos dos elementos orbitais do satélite (Morando, 1974). Os elementos orbitais métricos do satélite artificial: semieixo maior (a), excentricidade (e) e inclinação (i) são introduzidos através de r . As variáveis angulares são introduzidas usando trigonometria esférica: longitude do nodo ascendente (Ω), argumento

do pericentro (ω) e da anomalia verdadeira (f) através da relação (Carvalho et. al., 2010):

$$\text{sen}(\phi) = \text{sen}(i)\text{sen}(f + \omega) \tag{2}$$

3 Variação secular dos elementos angulares

Substituindo o potencial dado pela equação (1), nas equações planetárias de Lagrange, considerando apenas os termos seculares até a ordem de J_2 , temos as seguintes expressões para as variações dos elementos angulares (Morando, 1974):

$$\Omega = n_\Omega t + \Omega_0 = \left(-nJ_2 \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \frac{3}{2} \cos i \right) t + \Omega_0 \tag{3}$$

$$\omega = n_\omega t + \omega_0 = \left(nJ_2 \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(-\frac{3}{5} + \frac{15}{4} \cos^2 i \right) \right) t + \omega_0 \tag{4}$$

$$M = nt + n_M t + M_0 = nt + \left(3nJ_2 \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 i \right) (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \right) t + M_0 \tag{5}$$

Embora não haja perturbações seculares para elementos métricos (a , e , i) quando se considera no potencial gravitacional apenas harmônicos zonais pares, as perturbações periódicas em tais elementos provocadas pelos outros harmônicos, aqui não consideradas, são importantes para missões envolvendo satélites lunares baixos.

As tabelas 2, 3 e 4 mostram a variação de ω , Ω e M (n_ω , n_Ω e n_M), em graus por segundo, para alguns valores de $h=a-a_e$ e i considerando os termos seculares até a ordem de J_2 (todos os resultados descritos nas tabelas e gráficos ao longo deste trabalho foram obtidos a partir dos softwares MAPLE e MATLAB):

Tabela 2. Valores de n_ω , n_Ω e n_M para $e = 0.01$ e $i = 30^\circ$.

	$h=a-a_e$	n_ω	n_Ω	n_M
LUA	50 km	0.0000226 °/s	-0.0000132 °/s	0.0000096 °/s
	100 km	0.0000205 °/s	-0.0000120 °/s	0.0000087 °/s
	200 km	0.0000170 °/s	-0.0000100 °/s	0.0000072 °/s
TERRA	300 km	0.0001448 °/s	-0.0000850 °/s	0.0000614 °/s
	350 km	0.0001411 °/s	-0.0000828 °/s	0.0000598 °/s
	400 km	0.0001375 °/s	-0.0000807 °/s	0.0000583 °/s

Tabela 3. Valores de n_ω , n_Ω e n_M para $e = 0.01$ e $i = 60^\circ$.

	$h=a-a_e$	n_ω	n_Ω	n_M
LUA	50 km	0.0000034 °/s	-0.0000076 °/s	-0.0000019
	100 km	0.0000031 °/s	-0.0000069 °/s	-0.0000017
	200 km	0.0000026 °/s	-0.0000058 °/s	-0.0000014
TERRA	300 km	0.0000221 °/s	-0.0000491 °/s	-0.0000123
	350 km	0.0000215 °/s	-0.0000478 °/s	-0.0000120
	400 km	0.0000210 °/s	-0.0000466 °/s	-0.0000117

Tabela 4. Valores de n_ω , n_Ω , e n_M para $e = 0.01$ e $i = 100^\circ$.

	$h=a-a_e$	n_ω	n_Ω	n_M
LUA	50 km	-0.0000050 °/s	0.0000027 °/s	-0.0000070 °/s
	100 km	-0.0000045 °/s	0.0000024 °/s	-0.0000063 °/s
	200 km	-0.0000037 °/s	0.0000020 °/s	-0.0000052 °/s
TERRA	300 km	-0.0000319 °/s	0.0000170 °/s	-0.0000446 °/s
	350 km	-0.0000311 °/s	0.0000166 °/s	-0.0000435 °/s
	400 km	-0.0000303 °/s	0.0000162 °/s	-0.0000424 °/s

Considerando novamente apenas termos seculares, e de longo período contendo coeficientes fatorados por J_2 e J_4 na equação (1), a expressão para a perturbação é dada por (Carvalho et al., 2012):

$$U = -\frac{1}{512} \frac{1}{a^2} (n^2 (72J_4 a_e^4 - 720 \cos^2(i) J_4 a_e^4 + 840 \cos^4(i) J_4 a_e^4 + 360 J_4 a_e^4 e^2 + 128 J_2 a_e^2 a^2 + 192 J_2 a_e^2 a^2 e^2 + 945 J_4 a_e^4 e^4 - 384 \cos^2(i) J_2 a_e^2 a^2 - 9450 \cos^2(i) J_4 a_e^4 e^4 - 3600 \cos^2(i) J_4 a_e^4 e^2 + 11025 \cos^4(i) J_4 a_e^4 e^4 + 4200 \cos^4(i) J_4 a_e^4 e^2 - 576 \cos^2(i) J_2 a_e^2 a^2 e^2)) \tag{6}$$

Substituindo (6) nas equações planetárias de Lagrange (3, 4, 5), temos as seguintes expressões para as variações dos elementos angulares:

$$\Omega = n_{\Omega}t + \Omega_0 = \left(-\frac{1}{512} \frac{1}{a^4 \sqrt{1-e^2} \sin(i)}\right. \\
(n(1440 \cos(i) J_4 a_e^4 \sin(i) \\
- 3360 \cos^3(i) J_4 a_e^4 \sin(i) \\
+ 768 \cos(i) J_2 a_e^2 a^2 \sin(i) \\
+ 18900 \cos(i) J_4 a_e^4 e^4 \sin(i) \\
+ 7200 \cos(i) J_4 a_e^4 e^2 \sin(i) \\
- 44100 \cos^3(i) J_4 a_e^4 e^4 \sin(i) \\
- 16800 \cos^3(i) J_4 a_e^4 e^2 \sin(i) \\
\left. + 1152 \cos(i) J_2 a_e^2 a^2 e^2 \sin(i))\right)t + \Omega_0 \quad (7)$$

$$\omega = n_{\omega}t + \omega_0 = \left(\frac{1}{512} \frac{1}{a^4 e} (\sqrt{1-e^2} n \right. \\
(720 J_4 a_e^4 e + 384 J_2 a_e^2 a^2 e + 3780 J_4 a_e^4 e^3 \\
- 37800 \cos^2(i) J_4 a_e^4 e^3 - 7200 \cos^2(i) J_4 a_e^4 e \\
+ 44100 \cos^4(i) J_4 a_e^4 e^3 + 8400 \cos^4(i) J_4 a_e^4 e \\
- 1152 \cos^2(i) J_2 a_e^2 a^2 e) \\
\left. + \frac{1}{512} \frac{1}{a^4 \sqrt{1-e^2} \sin(i)} (\cos(i) n \right. \\
(1440 \cos(i) J_4 a_e^4 \sin(i) \\
- 3360 \cos(i)^3 J_4 a_e^4 \sin(i) \\
+ 768 \cos(i) J_2 a_e^2 a^2 \sin(i) \\
+ 18900 \cos(i) J_4 a_e^4 e^4 \sin(i) \\
+ 7200 \cos(i) J_4 a_e^4 e^2 \sin(i) \\
- 44100 \cos^3(i) J_4 a_e^4 e^4 \sin(i) \\
- 16800 \cos^3(i) J_4 a_e^4 e^2 \sin(i) \\
\left. + 1152 \cos(i) J_2 a_e^2 a^2 e^2 \sin(i))\right)t + \omega_0 \quad (8)$$

$$M = nt + n_M t + M_0 = nt + \left(n - \frac{1}{na} \left(2 - \frac{1}{512} \frac{1}{a^2} (n^2 (256 J_2 a_e^2 a \right. \right. \\
+ 384 J_2 a_e^2 a e^2 - 768 \cos^2(i) J_2 a_e^2 a - 1152 \cos^2(i) J_2 a_e^2 a e^2) \\
+ \frac{1}{256} \frac{1}{a^3} (n^2 (72 J_4 a_e^4 - 720 \cos^2(i) J_4 a_e^4 + 840 \cos^4(i) J_4 a_e^4 \\
+ 360 J_4 a_e^4 e^2 + 128 J_2 a_e^2 a^2 + 192 J_2 a_e^2 a^2 e^2 + 945 J_4 a_e^4 e^4 \\
- 384 \cos^2(i) J_2 a_e^2 a^2 - 9450 \cos^2(i) J_4 a_e^4 e^4 \\
- 3600 \cos^2(i) J_4 a_e^4 e^2 + 11025 \cos^4(i) J_4 a_e^4 e^4 \\
+ 4200 \cos^4(i) J_4 a_e^4 e^2 - 576 \cos^2(i) J_2 a_e^2 a^2 e^2) \\
\left. + \frac{1}{512} \frac{1}{a^4} ((1-e^2) n (720 J_4 a_e^4 e + 384 J_2 a_e^2 a^2 e \right. \\
+ 3780 J_4 a_e^4 e^3 - 37800 \cos^2(i) J_4 a_e^4 e^3 \\
- 7200 \cos^2(i) J_4 a_e^4 e + 44100 \cos^4(i) J_4 a_e^4 e^3 \\
\left. + 8400 \cos^4(i) J_4 a_e^4 e - 1152 \cos^2(i) J_2 a_e^2 a^2 e) \right) t + M_0 \quad (9)$$

As tabelas 5, 6 e 7 mostram a variação de ω , Ω e M (n_{ω} , n_{Ω} e n_M) em graus por segundo para alguns valores de $h=a-a_e$ e i considerando os termos seculares até a ordem de J_4 .

Uma expressão para o potencial com termos de curto e longo período, envolvendo harmônicos de maior grau e ordem pode ser encontrada em (Carvalho et al., 2012).

Tabela 5. Valores de n_{ω} , n_{Ω} , e n_M para $e = 0.01$ e $i = 30^\circ$.

	h=a-a _e	n _ω	n _Ω	n _M
LUA	50 km	-0.0000026 °/s	-0.0000141 °/s	-0.0000097 °/s
	100 km	-0.0000023 °/s	-0.0000127 °/s	-0.0000088 °/s
	200 km	-0.0000019 °/s	-0.0000105 °/s	-0.0000073 °/s
TERRA	300 km	-0.0000124 °/s	-0.0000852 °/s	-0.0000614 °/s
	350 km	-0.0000121 °/s	-0.0000830 °/s	-0.0000599 °/s
	400 km	-0.0000118 °/s	-0.0000809 °/s	-0.0000583 °/s

Tabela 6. Valores de n_{ω} , n_{Ω} , e n_M para $e = 0.01$ e $i = 60^\circ$.

	h=a-a _e	n _ω	n _Ω	n _M
LUA	50 km	-0.0000061 °/s	-0.0000074 °/s	0.0000032 °/s
	100 km	-0.0000055 °/s	-0.0000067 °/s	0.0000028 °/s
	200 km	-0.0000046 °/s	-0.0000056 °/s	0.0000022 °/s
TERRA	300 km	-0.0000369 °/s	-0.0000490 °/s	0.0000135 °/s
	350 km	-0.0000359 °/s	-0.0000478 °/s	0.0000131 °/s
	400 km	-0.0000350 °/s	-0.0000466 °/s	0.0000127 °/s

Tabela 7. Valores de n_{ω} , n_{Ω} , e n_M para $e = 0.01$ e $i = 100^\circ$.

	h=a-a _e	n _ω	n _Ω	n _M
LUA	50 km	-0.0000069 °/s	0.0000024 °/s	0.0000058 °/s
	100 km	-0.0000063 °/s	0.0000022 °/s	0.0000053 °/s
	200 km	-0.0000053 °/s	0.0000019 °/s	0.0000046 °/s
TERRA	300 km	-0.0000475 °/s	-0.0000170 °/s	0.0000435 °/s
	350 km	-0.0000463 °/s	0.0000166 °/s	0.0000424 °/s
	400 km	-0.0000451 °/s	0.0000161 °/s	0.0000414 °/s

5 Inclinação Crítica e Órbitas Heliossíncronas

Órbitas com inclinação crítica e órbitas heliossíncronas são comumente utilizadas por satélites com finalidade de sensoriamento remoto. A influencia dos harmônicos de alta ordem e grau para inclinações críticas e órbitas heliossíncronas de satélites lunares também é significativa, de fato, considerando-se J_2 e C_{22} temos as seguintes expressões para inclinação crítica e inclinações de órbitas heliossíncronas (Carvalho et al., 2009):

$$\cos^2(i) = \frac{-J_2 a_e^2 + 6C_{22} a_e^2 \cos(2\Omega)}{5(-J_2 a_e^2 + 2C_{22} a_e^2 \cos(2\Omega))} \quad (10)$$

$$i_s = \pi - \arccos\left(\frac{2,5462 \cdot 10^{-7} a^2 \sqrt{1-e^2}}{n(2\varepsilon + 6\delta \cos(2\Omega)e^2 + 4\delta \cos(2\Omega) + 3\varepsilon e^2)}\right) \quad (11)$$

em que:

$$\varepsilon = J_2 a_e^2$$

$$\delta = -C_{22} a_e^2$$

Assim, vemos que para um satélite lunar em uma órbita congelada a inclinação crítica seria $63,43^\circ$ se considerassemos apenas a influência do J_2 . Entretanto considerando-se a influência do harmônico C_{22} , vemos pela equação (10) que a inclinação depende de Ω . Na Figura 1 observa-se que nesse caso a inclinação crítica pode variar entre $58,77^\circ$ e $72,62^\circ$. Para satélites artificiais terrestres a variação é muito pequena quando se considera o C_{22} .

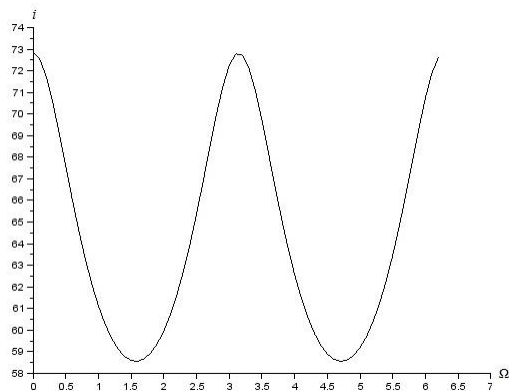


Figura 1. Variação da inclinação crítica em relação à longitude do nodo ascendente em que i está em graus e Ω está em radianos.

Para satélites lunares também as órbitas heliossíncronas são marcadamente influenciadas pelo harmônico C_{22} .

A Figura 2 ilustra a variação da inclinação de órbitas heliossíncronas para dois satélites lunares baixos ($a = 1838$ km), um em órbita circular e outro com excentricidade de 0,038.

Também, para órbitas heliossíncronas de satélites terrestres, devido à ordem C_{22} para a Terra, a influência na variação da inclinação é não considerável.

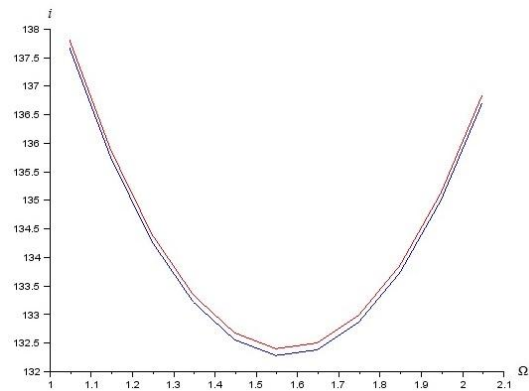


Figura 2. Variação da inclinação de duas órbitas heliossíncronas em relação à longitude do nodo ascendente em que as curvas vermelha e azul possuem excentricidade $e = 0$, $e = 0.038$ respectivamente, $a = 1838$ km, i está em graus e Ω está em radianos.

6 Conclusão

Verificamos que a influência de considerarmos mais harmônicos no cálculo da variação dos elementos keplerianos angulares é significativamente maior para o caso de satélites lunares do que para satélites artificiais terrestres, mesmo para satélites altos.

Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPESP, CAPES, CNPq e ao Fundo de Auxílio aos Docentes e Alunos da Universidade Federal de São Paulo (FADA) pelo apoio financeiro.

Referências Bibliográficas

Carvalho, J. P. S., Vilhena de Moraes, R., Prado, A. F. B. A. Planetary Satellite Orbiters: Applications for the Moon. *Mathematical Problems in Engineering*, DOI: [10.1155/2011/187478](https://doi.org/10.1155/2011/187478)

Carvalho, J. P. S., Vilhena de Moraes, R., Prado, A. F. B. A. Some orbital characteristics of lunar artificial satellites. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, vol. 108, n° 4, pp. 371-388, 2010. DOI: [10.1007/s10569-010-9310-6](https://doi.org/10.1007/s10569-010-9310-6)

Carvalho, J. P. S., Vilhena de Moraes, R., Prado, A. F. B. A. Nonsphericity of the Moon and Near Sun-Synchronous Polar Lunar Orbits. *Mathematical Problems in Engineering*, doi: [10.1155/2009/740460](https://doi.org/10.1155/2009/740460), 2009. DOI: [10.1155/2009/740460](https://doi.org/10.1155/2009/740460)

Chen, J. Y., Ning, J. S., Zhang, C. Y., Lou, J.

On the determination of lunar gravity field in the Chinese first lunar prospector mission. Chinese Journal of Geophysics, vol. 48, n° 2, pp. 275-281, 2005.

Leimoine, F., Kenyon, S., Factor, J., Trimmer, R., Pavlis, N., Chinn, D., Cox, C., Klosko, S., Luthcke, S., Torrence, M., Wang, Y., Williamson, E., Rapp, R., Olson, T. The development of the joint NASA – GSFC and the NIMA Geopotential Model EGM 96. NASA/TP–206861. 1998.

Morando, M. B. Mouvement d'un satellite artificiel de la Terre. Gordon & Breach, Paris, 1974.