Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Aplicação da Redução de Liapunov-Schmidt sem Simetria em Equações de Reação-Difusão

Rosangela Teixeira Guedes[1]
Departamento de Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR
Doutoranda em Matemática Aplicada, Ime-USP, SP

1 Introdução

Este trabalho considera o problema de reação-difusão com condições de Dirichlet

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{D}u_{\xi\xi} - f(u) 0 < \xi < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Por simplicidade consideremos a difusão em apenas uma dimensão espacial, e u é uma função escalar. Sejam as hipóteses $f(0) = 0$ e $f^{'}(0) < 0$ então $u = 0$ é um ponto de equilíbrio isolado da ODE associada a equação (1) e é instável. Além disso, com as condições de Dirichlet, $u = 0$ também é solução da EDP. Se a difusão é suficientemente pequena(resp.grande), a solução trivial do PDE é instável(resp.estável). Equações de reação-difusão são problemas comuns de bifurcação, o qual pode ser resolvido pela Redução de Liapunov- Schmidt.Além disso, podemos determinar que a solução trivial do problema (1) é do tipo bifurcação transcrítica se $f^{''}(0) \neq 0$.

2 Estabilidade da Solução Trivial e A Redução do Método de Liapunov-Schmidt sem Simetria

Pelo Teorema de Crandall-Rabinowitz o equilíbrio nulo é ponto de bifurcação do problema(1). A Bifurcação de soluções de equilíbrio da EDP com estrutura espacial não-trivial está associada a está mudança de estabilidade.Fisicamente, a forma mais natural para variar os efeitos de difusão é manter D constante mas variar o comprimento l do intervalo, desta forma é conveniente introduzir uma variável escalar $\eta = \dfrac{\xi}{l}$. Assim a equação de equilíbrio associada a equação de reação-difusão (1) com condições de Dirichlet se escreve como

$$\begin{cases} -u_{\eta\eta} + \lambda f(u) = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

[1]rosatguedes@gmail.com

em que $\lambda = \dfrac{l^2}{D}$ é o parâmetro de bifurcação.
Definimos uma aplicação no lado esquerdo de (2) em que $\Phi : X \times \Re \to C^0(0,1)$, $X = \{u \in C^2(0,1) : u(0) = u(1) = 0\}$. O espectro do operador L(a linearização da equação (2) na solução trivial) é dado por $n^2\pi^2 + \lambda f^{'}(0), n = 1, 2, ...$ e são todos positivos se $\lambda < \frac{\pi^2}{|f^{'}(0)|}$..
Portanto $u = 0$ é soluçao estável de (2) para tal λ. Se λ estiver perto de $\lambda_0 = \frac{\pi^2}{|f^{'}(0)|}$, temos que $(d\Phi)_{0,\lambda_0}$ é singular e a dimensão do núcleo do operador $(d\Phi)_{0,\lambda_0}$ é unidimensional e gerado por $u_0(\eta) = \sin(\pi\eta)$.
Em seguida usando os passos da Redução de Liapunov-Schmidt segue que a solução trivial é bifurcação transcrítica em $\lambda = \lambda_0$ se $f^{''}(0) \neq 0$. Pode acontecer, que $f^{''}(0) = 0$, por exemplo, se $f(u)$ é uma função ímpar e neste caso, a bifurcação é supercrítica ou subcrítica dependendo do sinal de $f^{'''}(0)$.

Referências

[1] Grindrod, P. The Theory and Applications of Reaction-Diffusion Equations, Patterns and Waves. *Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series*:1-275, 1996.

[2] H. Kielhöfer. *Bifurcation Theory:An Introduction with Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 2011.

[3] M. Golubitsky. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol I and vol II. Springer-Verlag,Harper-Row, New York, 1985.