Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Construções Algébricas do Reticulado E_8 via teoria algébrica dos números e via álgebra dos quatérnios

Emerson Dutra[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso (IFMT), Campus Várzea Grande, MT
Cintya Wink de Oliveira Benedito[2]
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus Experimental de São João da Boa Vista, SP

1 Introdução

O reticulado E_8 é um reticulado muito importante pois apresenta a melhor densidade de centro na dimensão 8, além de ser o único reticulado unimodular e par nesta dimensão. Podemos definir o reticulado E_8 como o conjunto de vetores 8-dimensionais cujas coordenadas de cada vetor ou são todas inteiras ou todas semi-inteiras, e com a soma sendo múltiplo de 2. O objetivo deste trabalho consiste em apresentar construções algébricas do reticulado E_8 via teoria algébrica dos números e via álgebra dos quatérnios, tais construções podem ser encontradas de forma detalhada em [2].

2 Reticulado E_8 via teoria algébrica dos números

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo de números de grau n, $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$ o discriminante de $\mathbb{K}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ o anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{K}$, $\mathfrak{A}$ um ideal não nulo de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ e $\mathcal{N}(\mathfrak{A})$ a norma do ideal $\mathfrak{A}$. Temos que a perturbação $\sigma_\alpha : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^n$ do homomorfismo canônico, com $\alpha_i = \sigma(\alpha) > 0$ e $\sigma_i(\alpha) \in \mathbb{R}$, aplicada em $\mathfrak{A}$ produz um reticulado algébrico $\sigma_\alpha(\mathfrak{A})$ com densidade de centro dada por

$$\delta(\sigma_\alpha(\mathfrak{A})) = \frac{1}{2^n(\mathcal{N}(\alpha)|\mathcal{D}_{\mathbb{K}}|)^{\frac{1}{2}}} \frac{t_\alpha^{\frac{n}{2}}}{\mathcal{N}(\mathfrak{A})} \tag{1}$$

onde $t_\alpha = \min\{\mathcal{T}r(\alpha x \overline{x}), x \in \mathfrak{A}, x \neq 0\}$ e $\mathcal{N}(\alpha)$ é a norma do elemento α [1, 2]. Visto que o reticulado E_8 possui densidade de centro igual a $\frac{1}{16}$, podemos construir versões rotacionadas do reticulado E_8 a partir de um corpo de números $\mathbb{K}$ de grau 8 e determinando parâmetros os t_α, $\mathcal{N}(\alpha)$ e $\mathcal{N}(\mathfrak{A})$, quando igualamos a Equação (1) a $\frac{1}{16}$. No exemplo a seguir apresentamos um dos reticulados obtidos.

[1]emerson.dutra@vgd.ifmt.edu.br
[2]cintyawink@gmail.com

Exemplo 2.1. *Sejam o corpo de números* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\zeta_{20})$, $\mathfrak{A} = (-1 - \zeta_{20} + 2\zeta_{20}^2 + \zeta_{20}^3 + \zeta_{20}^4 + 2\zeta_{20}^6 + \zeta_{20}^7)\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, *um ideal de* $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\zeta_{20}]$ *e* $\alpha = 1 + (\zeta_{20} + \zeta_{20}^{-1}) - (\zeta_{20}^2 + \zeta_{20}^{-2}) - (\zeta_{20}^3 + \zeta_{20}^{-3}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. *Temos que* $n = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = 8$, $\mathcal{D}_{\mathbb{K}} = 2^8 \cdot 5^6$, $\mathcal{N}(\mathfrak{A}) = 80$, $\mathcal{N}(\alpha) = 1$ *e* $t_\alpha = min\{\mathcal{T}r(\alpha x \overline{x}) : x \in \mathfrak{A}, x \neq 0\} = 40$. *Portanto, a densidade de centro do reticulado* $\sigma_\alpha(\mathfrak{A})$ *é dada por* $\delta(\sigma_\alpha(\mathfrak{A})) = \dfrac{1}{2^n(\mathcal{N}(\alpha)|\mathcal{D}_{\mathbb{K}}|)^{\frac{1}{2}}} \dfrac{t_\alpha^{\frac{n}{2}}}{\mathcal{N}(\mathfrak{A})} = \dfrac{1}{2^8(2^8 \cdot 5^6 \cdot 1)^{\frac{1}{2}}} \dfrac{(40)^4}{80} = \dfrac{1}{16}$.

3 Reticulado E_8 via álgebra dos quatérnios

Dado $\mathbb{K}$ um corpo de números de grau 2, $\mathcal{A} = (a, b)_{\mathbb{K}}$ uma álgebra dos quatérnios definida positiva sobre $\mathbb{K}$, $\mathfrak{A}$ um ideal de uma ordem maximal $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ um elemento totalmente positivo. Podemos construir reticulados $\Lambda = (\mathfrak{A}, \alpha)$ de dimensão 8, cuja matriz de Gram G é uma forma bilinear simétrica $B : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathbb{Q}$ dada por $G = B(x_i, x_j) = \mathcal{T}r_{\mathbb{K}}(\alpha \mathcal{T}rd(x_i \overline{x_j}))$, onde x_i, x_j são elementos da $\mathbb{Z}$-base de $\mathfrak{A}$, $\mathcal{T}r_{\mathbb{K}}$ é o traço de $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{T}rd$ é o traço reduzido. Além disso, o determinante da matriz de Gram é dado pela equação, [4],

$$det \text{ G} = \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^4 \mathcal{N}_{\mathbb{K}}(\alpha) \mathcal{N}_{\mathbb{K}}(\mathcal{N}(\mathfrak{A}))^4 \mathcal{N}(\mathcal{D}(\mathcal{M}))^2, \tag{2}$$

onde $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$ é o discriminante de $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ o discriminante reduzido da ordem maximal $\mathcal{M}$. Como o reticulado E_8 é unimodular, ou seja, $det(E_8) = 1$, igualando a Equação (2) a 1, obtemos uma relação entre os parâmetros envolvidos para se determinar $\Lambda = (\mathfrak{A}, \alpha)$, de modo que seja uma versão rotacionada do reticulado E_8.

Exemplo 3.1. *Seja* $\mathcal{A} = (-1, -1)_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$. *Em [3] são apresentados uma ordem maximal* $\mathcal{M}$ *para* $\mathcal{A} = (-1, -1)_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$, *caracterizada pela base* $\beta = \{1, \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}, \dfrac{1+j}{\sqrt{2}}, \dfrac{1+i+j+k}{2}\}$, *e* $\alpha = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ *um elemento de* $\mathbb{K}$ *totalmente positivo. Assim, tomando* $\mathfrak{A} = \mathcal{M}$ *caracterizada pela base* β, *temos que reticulado* $\Lambda = (\mathfrak{A}, \frac{2+\sqrt{2}}{4})$ *possui matriz de Gram com determinante igual a 1 e o quadrado da norma das coordenadas é par, ou seja, o reticulado* $\Lambda = (\mathfrak{A}, \frac{2+\sqrt{2}}{4})$ *é isomorfo ao reticulado* E_8.

Referências

[1] A. A. Andrade, A. J. Ferrari, C. W. Benedito and S. I. R. Costa. *Constructions of algebraic lattices.* Computacional and Applied Mathematics, 29(3), p.493-505, 2010.

[2] E. Dutra. Construções do reticulado E_8 via teoria algébrica dos números, álgebra dos quatérnios e álgebra dos octônios. Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional, IMECC - UNICAMP, 2016.

[3] M. Jacques. *Perfect lattices in euclidean spaces.* Springer science & bussiness, 2013.

[4] F.-T. Tu and Y. Yang, *Lattice packing from quaternion algebras*, Algebraic Number Theory and Related Topics, 2012.