Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Avaliação Rápida em Problemas de Otimização Binária

Eduardo A. J. Anacleto[1], Cláudio N. Meneses[2]
Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, Santo André, SP

Resumo: Neste trabalho, apresentamos um resultado original que possibilita acelerar o processo de resolução do problema de Programação Quadrática Binária Irrestrita. A partir desse resultado, desenvolvemos um algoritmo e realizamos experimentos computacionais com instâncias disponíveis na literatura do problema.

Palavras-chave: eficiência computacional; otimização combinatória; programação quadrática binária

1 Introdução

Nesta pesquisa investigamos o problema de Programação Quadrática Binária Irrestrita (`UBQP`), que pode ser utilizado para modelar problemas de otimização combinatória. Sejam: $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais excluindo o zero, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{B}^n$ o conjunto dos vetores binários de dimensão n, $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}^{n\times n}$ o conjunto das matrizes de dimensão $n \times n$ com coeficientes racionais e $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{Q}$. Dado $Q \in \mathbb{Q}^{n\times n}$, desejamos encontrar um vetor $x \in \mathbb{B}^n$ tal que $f(x) = x^\intercal Qx$ seja mínimo. Em outras palavras, precisamos resolver o problema $\operatorname{argmin}\{f(x) = x^\intercal Qx \mid x \in \mathbb{B}^n \text{ e } Q \in \mathbb{Q}^{n\times n}\}$.

Os métodos que resolvem instâncias do `UBQP` reavaliam $f(x)$ diversas vezes. Esta reavaliação consome relativamente muito tempo de processamento. A fim de reduzir este tempo, Glover e Hao [1] propuseram uma fórmula para reavaliar $f(x)$ e uma estratégia para utilizá-la, quando um dos componentes de x tem seu valor modificado. Em outro artigo, Glover e Hao [2] apresentaram um método incremental que gera fórmulas para calcular $f(x)$, quando há mudanças nos valores de dois ou mais componentes de x. Neste mesmo artigo eles propuseram uma estratégia para aplicar a fórmula que avalia $f(x)$, quando há mudanças nos valores de dois componentes de x. As referências [3,4] descrevem aplicações.

Diferente dos resultados propostos por Glover e Hao [1, 2], criamos uma fórmula para efetuar a reavaliação rápida de $f(x)$, quando um subconjunto dos componentes de x tem seus valores modificados. A partir desta fórmula criamos um algoritmo de busca e realizamos experimentos computacionais para tentar resolver instâncias do `UBQP`.

2 Fórmula para Reavaliação

Dados $x, y \in \mathbb{B}^n$ com x diferente de y em r componentes. O desenvolvimento da nossa fórmula de reavaliação ocorreu da seguinte maneira: decompomos cada uma das funções $f(x) = x^\intercal Qx$ e $f(y) = y^\intercal Qy$ em quatro parcelas, isolamos a parcela de $f(x)$ que é igual a parcela de $f(y)$, substituímos esta parcela em $f(y)$ e, então, simplificamos $f(y)$ tal como é apresentado no Teorema 2.1.

[1]eduardo.anacleto@ufabc.edu.br
[2]claudio.meneses@ufabc.edu.br

Teorema 2.1. *Sejam* $n \in \mathbb{N}^*$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $r \in N$, $N_r \subsetneq N$ *com* $|N_r| = r$, $\overline{N}_r = N \backslash N_r$, x *e* $y \in \mathbb{B}^n$ *com* $y_i = 1 - x_i \quad \forall i \in N_r$, $y_i = x_i \quad \forall i \in \overline{N}_r$ *e* $Q \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ *na forma triangular inferior. Dado o valor de* $f(x)$, $f(y) = y^\intercal Q y$ *pode ser calculado por:*

$$f(y) = f(x) - \sum_{i \in N_r} \Big[(1 - 2y_i) \Big(\sum_{\substack{j \in \overline{N}_r \\ j < i}} q_{ij} y_j + \sum_{\substack{j \in \overline{N}_r \\ j > i}} q_{ji} y_j \Big) + \sum_{\substack{j \in N_r \\ j \leqslant i}} q_{ij} (1 - y_i - y_j) \Big]. \qquad (1)$$

Na Figura 1, a área sob cada curva mostra quando é melhor utilizar a Fórmula (1), ao invés de $f(x) = x^\intercal Q x$, de forma analítica e experimental.

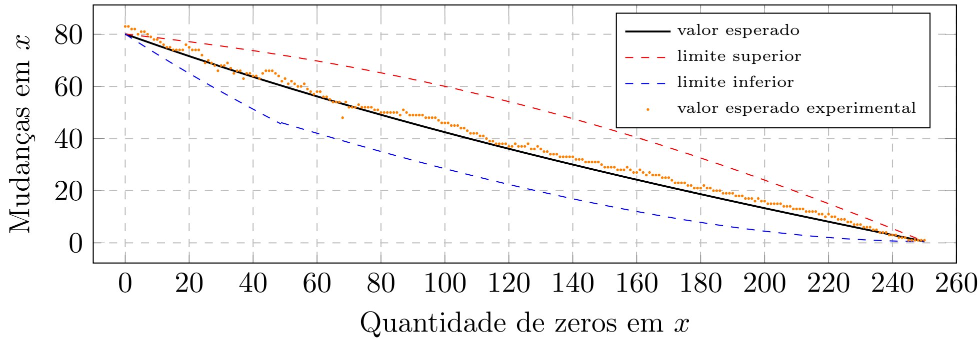

Figura 1: Quantidades de mudanças nos componentes de x quando a Fórmula (1) executa menos operações que $f(x) = x^\intercal Q x$, para Q com dimensão 250×250.

3 Conclusões

Conseguimos identificar, de maneira analítica, uma relação entre os valores de r e o número de zeros no vetor x que faz com que seja melhor executar a Fórmula (1). Este resultado teórico também foi verificado experimentalmente.

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Federal do ABC e ao CNPq pelas bolsas de mestrado e de produtividade em pesquisa (Processo 312206/2015-1) concedidas ao primeiro e ao segundo autores, respectivamente.

Referências

[1] F. Glover and J. Hao. Efficient Evaluations for Solving Large 0-1 Unconstrained Quadratic Optimization Problems *International Journal of Metaheuristics*, 1:3-10, 2010.

[2] F. Glover and J. Hao. Fast 2-flip Move Evaluations for Binary Unconstrained Quadratic Optimization Problems *International Journal of Metaheuristics*, 1:100-107, 2010.

[3] W. Chen. Optimality Conditions for the Minimization of Quadratic 0-1 Problems *SIAM Journal on Optimization*, 25:1717-1731, 2014.

[4] Y. Wang and A. Punnen. The Boolean Quadratic Programming Problem with Generalized Upper Bound Constraints *Computers & Operations Research*, 77:1-10, 2017.