Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Problema Foco-Centro: Relações entre a Divergência e os Coeficientes de Lyapunov e suas Aplicações

Felipe Otávio dos Santos[1]
Doutorando em Modelagem Computacional, LNCC, Petrópolis, RJ
Luis Fernando Mello[2]
Instituto de Matemática e Computação, UNIFEI, Itajubá, MG

1 Introdução

Na teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias (EDOs), o estudo e a caracterização dos retratos de fase de campos planares se tornou alvo de várias pesquisas científicas em matemática. O Problema Foco-Centro é um problema em aberto, sendo um dos mais famosos desta teoria. Considere a seguinte equação diferencial planar

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y), \\ \\ \dot{y} = Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

onde $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são funções analíticas reais em uma vizinhança de O (origem das coordenadas do $\mathbb{R}^2$), tais que $P(0,0) = Q(0,0) = 0$. Quando todas as órbitas do sistema (1), numa vizinhança perfurada de O são periódicas, então a origem é um centro. Se as órbitas do sistema (1), numa vizinhança perfurada de O são espirais, então dizemos que a origem é um foco. Um ponto de equilíbrio (x_0, y_0) é dito monodrômico, se não existem órbitas se aproximando, ou se afastando, de (x_0, y_0), com tangente bem definida em (x_0, y_0).

O Problema Foco-Centro, consiste em distinguir quando um ponto singular monodrômico de (1) é um centro ou um foco. Como de costume, definimos a divergência do sistema (1), como a função

$$\mathrm{div}\mathcal{X}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y).$$

Nosso objetivo é destacar alguns resultados que relacionam a divergência do sistema (1) e as constantes de Poincaré-Lyapunov com a solução do Problema Foco-Centro, dentre eles, o seguinte resultado que pode ser encontrado em [3].

[1] felipeos@lncc.br
[2] lfmelo@unifei.edu.br

Suponha que a origem do sistema diferencial analítico (1) é um ponto singular monodrômico. Se a divergência div$\mathcal{X}$ do sistema (1) é de sinal definido, então a origem do sistema (1) é um foco; ou instável se a divergência é definida positiva ou estável se for definida negativa.
Para finalizar, serão expostas algumas aplicações, onde os teoremas estudados foram fundamentais para decidir sobre a estabilidade do sistema.

2 Conclusões

O estudo dos teoremas apresentados para a investigação do Problema Foco-Centro nos permitiu relacionar a divergência do campo de vetores que define a equação diferencial e os coeficientes de Lyapunov. Tal relação possibilitou-nos determinar a estabilidade de alguns pontos de equilíbrio em equações diferenciais ordinárias analíticas. Através destes estudos foi possível verificar dificuldades computacionais, bem como a eficácia de cada um dos teoremas. Observamos que apesar destes teoremas serem boas ferramentas para determinar a estabilidade de alguns pontos de equilíbrio, ainda estamos longe de encontrar uma solução definitiva para o Problema Foco-Centro.

Referências

[1] C. Chicone. *Ordinary Differential Equations With Applications*. Springer, 1991.

[2] F. Dumortier, J. Llibre and J. Artés. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Springer, 2006.

[3] M. Grau and J. Llibre. *Divergence and Poincaré-Liapunov constants for analytic differential systems*. Journal of Differential Equations, 258:4348-4367, 2015.

[4] J. Sotomayor. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Textos universitários do IME-USP, Livraria da Física, São Paulo, 2011.