Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Zeros de polinômios que satisfazem uma relação de recorrência do tipo R_{II}

Junior A. Pereira[1]
Pós-Graduação em Matemática, IBILCE, UNESP, São José do Rio Preto, SP
Cleonice F. Bracciali, A. Sri Ranga
Departamento de Matemática Aplicada, IBILCE, UNESP, São José do Rio Preto, SP

1 Introdução

A relação de recorrência dada por

$$P_{n+1}(x) = \sigma_{n+1}(x - v_{n+1})P_n(x) - u_{n+1}(x - a_n)(x - b_n)P_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = \sigma_1(x - v_1)$, onde para $n \geq 1$, $\{\sigma_n\}, \{v_n\}, \{u_n\}, \{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências de números complexos. Esta relação é conhecida com recorrência do tipo R_{II} e foi estudada em [1].

Considerando $\{c_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais e $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$ uma sequência encadeada positiva, em [2] foi estudada a sequência $\{P_n\}_{n\geq 0}$ que satisfaz o seguinte tipo especial de relação de recorrência do tipo R_{II}:

$$P_{n+1}(x) = (x - c_{n+1})P_n(x) - d_{n+1}(x^2 + 1)P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{1}$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x - c_1$. Diz-se que a sequência $\{d_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência encadeada positiva se existe uma sequência $\{g_n\}_{n\geq 0}$ tal que,

$$(i) \quad 0 \leq g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, \quad n \geq 1,$$
$$(ii) \quad d_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad n \geq 1,$$

$\{g_n\}_{n\geq 0}$ é chamada de sequência de parâmetros para $\{d_n\}_{n\geq 1}$.

2 Zeros dos polinômios que satisfazem a recorrência (1)

Em [2] foi mostrado que os zeros dos polinômios $P_n, n \geq 1$, dados pela relação de recorrência (1), são reais e distintos. Foi também demonstrado que estes zeros são as soluções de um problema de autovalor generalizado

$$A_n u = xB_n u, \quad n \geq 1, \tag{2}$$

onde $u \in \mathbb{R}^n$, A_n é uma matriz hermitiana tridiagonal e B_n é uma matriz simétrica tridiagonal dadas, respectivamente, por

[1]junior.gusto@hotmail.com

$$\begin{bmatrix} c_1 & i\sqrt{d_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -i\sqrt{d_2} & c_2 & i\sqrt{d_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{d_3} & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & i\sqrt{d_n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -i\sqrt{d_n} & c_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{d_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{d_2} & 1 & \sqrt{d_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_3} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \sqrt{d_n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{d_n} & 1 \end{bmatrix}.$$

Existem vários métodos numéricos para a determinação de autovalores de um problema de autovalores generalizado, mas qual o mais eficiente quando as matrizes do problema são dadas como em (2)? Muitos destes métodos não utilizam do fato das matrizes A_n e B_n serem tridiagonais. Discutiremos o uso da Iteração de Laguerre, [3] e [5], um método iterativo que aproxima os zeros do polinômio P_n, com grau cúbico de convergência, utilizando a iteração

$$L_{\pm}(x) = x + \frac{nP_n(x)}{-P_n'(x) \pm sgn(P_n(x))\sqrt{(n-1)[(n-1)(P_n'(x))^2 - nP_n''(x)P_n(x)]}}.$$

Como os zeros de P_n são simples, este método pode encontrar todos eles um a um de forma crescente ou decrescente. Sejam $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ os zeros de P_n. Para uma aproximação inicial adequada, utilizamos limitantes dos zeros de P_n, que podem ser obtidos através da relação de recorrência (1). Sem perda de generalidade, seja x_n o maior zero de P_n encontrado, a busca pelo zero x_{n-1} se inicia com uma nova aproximação, digamos $x_n - \epsilon$, onde $\epsilon > 0$. Este processo pode acarretar perda de algum zero, que pode ser resolvido pelo uso do Teorema de Sturm, [4, p.336] que garante se há ou não zeros de P_n no intervalo $(x_n - \epsilon, x_n)$. Analogamente podemos encontrar os outros zeros.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio recebido das agências de fomento CAPES, CNPq e FAPESP.

Referências

[1] M.E.H. Ismail and D.R. Masson, Generalized orthogonality and continued fractions, *J. Approx. Theory*, 83 (1995), 1-40.

[2] M.E.H. Ismail and A. Sri Ranga, R_{II} type recurrence, generalized eigenvalue problem and orthogonal polynomials on the unit circle, Arxiv, 2016.

[3] K. Li, T.Y. Li and Z. Zeng, An algorithm for the generalized symmetric tridiagonal eigenvalue problem, *Numer. Algorithms*, 8 (1994), 269-291.

[4] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 2002.

[5] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford, 1965.