Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Comparativo Sobre Métodos Iterativos de Resolução de Sistemas Lineares de Grande Porte

Luís Ricardo Fernandes[1]
CEFET-MG, Belo Horizonte, MG
Rodrigo Tomás Nogueira Cardoso[2]
Departamento de Física e Matemática, CEFET-MG, Belo Horizonte, MG
Carlos Magno Martins Cosme[3]
Departamento de Física e Matemática, CEFET-MG, Belo Horizonte, MG

1 Introdução

Neste trabalho serão analisados três métodos iterativos para resolução de sistemas lineares de grande porte: CMRH, GMRES e LCD. Os sistemas são do tipo $Ax = \boldsymbol{b}$, sendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Os métodos GMRES [3] e CMRH são baseados em espaços de $Krylov$. Uma outra versão do método CMRH que inclui um processo de sobrearmazenamento (CMRH-OVER) [2] também será abordado. O método LCD [1] é baseado em vetores de direções conjugadas.

2 Espaços de $Krylov$ e Vetores de Direções Conjugadas

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\boldsymbol{r_0} \in \mathbb{R}^n$, chama-se o espaço $\mathcal{K}_k(A, \boldsymbol{r_0}) = \{\boldsymbol{r_0}, A\boldsymbol{r_0}, A^2\boldsymbol{r_0}, \cdots, A^{k-1}\boldsymbol{r_0}\}$ de espaço de $Krylov$ de ordem k. Os métodos GMRES, CMRH e CMRH-OVER têm como base esses espaços. Enquanto o GMRES utiliza o método de Arnoldi, através do processo de ortogonalização de Gram-Schindt, para construir uma base ortonormal para $\mathcal{K}_k$, o método CMRH utiliza o processo de Hessenberg via fatoração LU. Essa é a principal diferença entre os dois métodos. Em cada caso é definido um processo iterativo dado por $\boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{z_k}$, sendo $\boldsymbol{z_k} \in \mathcal{K}_k$ escolhido de forma a minimizar o erro de aproximação. Como a dimensão deste espaço pode ser grande, aplica-se um processo de reinicialização sendo que, após k_{max} iterações, a aproximação inicial passa a ser a última solução encontrada. O CMRH-OVER consiste em uma adaptação do método CMRH, que armazena na própria matriz A os vetores que formam a base de $\mathcal{K}_k$. Devido a isto, o CMRH não utiliza o processo de reinicialização.

Os vetotes $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \cdots, \boldsymbol{p_n}$ são chamados de direções conjugadas à esquerda de uma matriz real A não singular se: $\boldsymbol{p_i^T} A\boldsymbol{p_j} = 0\ \forall\ i < j$ e $\boldsymbol{p_i^T} A\boldsymbol{p_i} \neq 0\ \forall\ i$. O método LCD consiste

[1]lrfee2009@hotmail.com
[2]rodrigo@des.cefetmg.br
[3]cmagnomc@des.cefetmg.br

basicamente em encontrar um conjunto de vetores de direções conjugadas à esquerda de A, que formam uma base do espaço vetorial no qual a solução exata $\boldsymbol{x}^* = A^{-1}\boldsymbol{b}$ pode ser obtida através de uma combinação linear dos vetores dessa base. Este método também utiliza o processo de reinicialização.

3 Experimentos numéricos

Para comparação dos métodos, utilizou-se dois diferentes tipos de matrizes. Em todos os experimentos, tem-se aproximação inicial $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{0}$ e tolerância da norma do erro $tol = 10^{-14}$. No primeiro caso, a matriz de Riemann é definida por: $A(i,j) = i$, se $i+1$ divide $j+1$ e $A(i,j) = -1$, caso contrário. A construção desta matriz garante que não seja simétrica. Neste caso, tem-se $n = 1000$ e $kmax = 100$. No segundo, tem-se a matriz definida por $A(i,j) = 1$ se $i = j$; $A(i,j) = sgn(j-i)\varepsilon^k$ se $j = 1 \pm k$, para $k = 1, 2, 3$; $A(i,j) = 0$ caso contrário. No experimento realizado, adotou-se $\varepsilon = 1.1$, $n = 100$ e diferentes valores para $kmax$.

Para o primeiro exemplo, a convergência da norma residual é bem similar em todos os métodos, sendo necessárias aproximadamente 200 iterações para encontrar a solução aproximada do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. No segundo exemplo, o método CMRH-OVER converge com 98 iterações. Os métodos CMRH e GMRES convergem apenas quando $kmax \geq 94$ e $kmax \geq 95$ respectivamente, porém utilizando mais iterações que o CMRH-OVER. O método LCD não converge para esse tipo de matriz. Além disso, o método CMRH-OVER utilizou menos espaço de memória que os outros métodos, como esperado, uma vez que este método armazena os vetores da base na própria matriz A.

Esses exemplos mostram que a estrutura da matriz é condicionante para a convergência dos métodos. Além disso, a quantidade de iterações definida para o processo de reinicialização pode determinar a convergência do método. Isso pode ser observado no segundo exemplo, quando $kmax < 94$ os métodos GMRES e CMRH não convergiram. Em geral, nos outros exemplos realizados, os métodos GMRES e CMRH tiveram convergência muito parecida, apresentando quase sempre resultados melhores que o LCD.

Referências

[1] Y. Dai, and J. Yuan. Study on semi-conjugate direction methods for non-symmetric systems, *International journal for numerical methods in engineering*, volume 60, pages 1383–1399, 2004.

[2] M. Heyouni, and H. Sadok. A new implementation of the CMRH method for solving dense linear systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, volume 213, pages 387–399, 2008.

[3] Y. Saad, and M.H. Martin. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM Journal on scientific and statistical computing*, volume 7, pages 856–869, 1986.