Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Alguns resultados sobre um sistema de equações do tipo Holm-Staley

Priscila Leal da Silva[1]
Departamento de Matemática, UFSCar, São Carlos, SP
Igor Leite Freire[2]
Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, Santo André, SP

1 Introdução

Em [1], os autores consideraram a seguinte família de equações diferenciais parciais:

$$m_t + um_x + bu_x m, \quad b \neq 0. \tag{1}$$

Em (1), $u = u(x,t)$ e $m = u - u_{xx}$. Tal equação é usualmente conhecida como *b-equation* ou equação de Holm-Staley devido ao trabalho de D. Holm e M. Staley acerca desta equação, veja [1].

A família (1) possui várias propriedades interessantes: possui dois membros completamente integráveis ($b = 2$ e $b = 3$), admite ondas solitárias fracas da forma

$$u(x,t) = ce^{-|x-ct|}, \tag{2}$$

e com comportamento solitônico, uma vez que admite uma espécie de superposição de soluções do tipo (2). Tais resultados foram provados em [1] e referências correlatadas citadas no trabalho.

Um caso particularmente interessante da equação (1) ocorre quando $b = 0$, ou seja, a equação

$$m_t = um_x, \tag{3}$$

onde utilizamos a transformação $t \mapsto -t$ em (1). Para este caso, em [2] foi provado que (1) admite um outro tipo de onda solitária fraca, chamada *kink*, a qual também admite superposições de soluções do mesmo tipo. Para maiores detalhes, veja [2].

Neste trabalho estudamos a seguinte generalização da equação (4):

$$\begin{cases} m_t = v^b m_x, \\ \\ n_t = u^b n_x, \end{cases} \tag{4}$$

onde b é um parâmetro contínuo.

[1]pri.leal.silva@gmail.com
[2]igor.freire@ufabc.edu.br

2 Resultados principais

Teorema 1. *Uma base para as simetrias de Lie do sistema* (4) *é dada pelos seguintes operadores diferenciais:*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial t},\ D_b = -bt\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} \tag{5}$$

para qualquer b. *Se* $b = 1$, *em adição aos operadores* (5) *há um quarto gerador, dado por*

$$X_3 = -t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}. \tag{6}$$

Nosso próximo resultado é o seguinte:

Teorema 2. *O par de funções* (u, v) *dado por*

$$u = \sum_{i=1}^{N} c_i sign(x - p_i)(e^{-|x-p_i|} - 1), \quad v = \sum_{i=1}^{M} \tilde{c}_i sign(x - q_i)(e^{-|x-q_i|} - 1), \tag{7}$$

em que $(c_1, \ldots, c_N)$ *e* $(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_M)$ *são constantes, é uma solução multi-kink do sistema* (4) *se, e somente se, as funções* p_i *e* q_i *satisfazem o sistema*

$$\begin{aligned} p_i' &= -\left(\sum_{j=1}^{M} \tilde{c}_j sign(p_i - q_j)(e^{-|p_i-q_j|} - 1)\right)^b, \quad i = 1, \ldots, N, \\ q_i' &= -\left(\sum_{j=1}^{N} c_j sign(q_i - p_j)(e^{-|q_i-p_j|} - 1)\right)^b, \quad i = 1, \ldots, M. \end{aligned} \tag{8}$$

Agradecimentos

P. L. da Silva agradece a CAPES pelo auxílio pós-doutoral e I. L. Freire agradece ao CNPq (processo número 308516/2016-8) pelo auxílio financeiro.

Referências

[1] D. D. Holm and M. F. Staley, Wave structure and nonlinear balances in a family of evolutionary PDEs, *Siam. J. Appl. Dyn. Sys.*, 2:323–380, 2003.

[2] B. Xia, Z. Qiao, The n-kink, bell-shape and hat-shape solitary solutions of b-family equation in the case of $b = 0$, *Phys. Lett. A*, 377:2340–2342, 2013.

