Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Soluções peakon e kink para uma família de equações do tipo Holm-Staley

Priscila Leal da Silva[1]
Departamento de Matemática, UFSCar, São Carlos, SP
Igor Leite Freire[2]
Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, Santo André, SP

1 Introdução

Em [1], os autores apresentaram a família de equações diferenciais parciais

$$m_t + um_x + bu_x m, \quad b \neq 0, \tag{1}$$

no qual $u = u(x,t)$ e $m = u - u_{xx}$, conhecida hoje como b-*equation*. Tal equação apresenta soluções fracas especiais do tipo *peakon* para todos os valores de b, porém perdem a existência de *kinks* fracos da forma

$$u = A\,\text{sign}\,(x - ct)(e^{-|x-ct|} - 1), \quad A \neq 0. \tag{2}$$

Em [3], os autores mostraram que a ausência de tais *kinks* fracos está relacionada à restrição $b \neq 0$ em (1). Em outras palavras, a equação $m_t + um_x = 0$, que corresponde ao caso $b = 0$ em (1), admite (2) como solução e, mais do que isso, admite sobreposição de *kinks* da forma

$$u = \sum_{i=1}^{N} c_i\,\text{sign}\,(x - p_i(t))(e^{-|x-p_i(t)|} - 1), \tag{3}$$

no qual as funções p_i, $i = 1, \ldots, N$, satisfazem um sistema dinâmico, veja [3].

Neste trabalho,consideramos a generalização $m_t + u^b m_x = 0,\ b \in \mathbb{N}$ e mostramos que tal equação admite soluções do tipo *peakons* e *kink* para todos os valores de b.

2 Resultados preliminares

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &(1 - D_x^2)u_t + u^b(1 - D_x^2)u_x = 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad m = u - u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ &u(x,0) =: u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ &u, m \to 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to 0. \end{aligned} \tag{4}$$

[1] priscilaleal@dm.ufscar.br
[2] igor.freire@ufabc.edu.br

Dado $T > 0$, seja $\mathcal{D}([0,T)\times\mathbb{R})$ o conjunto de funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto. Uma função $\varphi \in \mathcal{D}([0,T)\times\mathbb{R})$ é chamada de função teste. Por fim, lembremos que $u = (1-D_x^2)^{-1}m = p * m$, no qual $p(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ e $*$ denota a convolução, veja [2].

Definição 1. *Dado um valor inicial* $u_0 \in W^{1,b+1}(\mathbb{R})$, *a função* $u \in L^\infty_{loc}([0,T), W^{1,b+1}_{loc}(\mathbb{R}))$ *é dita ser uma solução fraca do problema de valor inicial* (4) *se a condição*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[u\varphi_t + \frac{u^{b+1}}{b+1}\varphi_x + p * \left(\frac{3b}{2}u^{b-1}u_x^2\right)\varphi_x + p * \left(\frac{b(b-1)}{2}u^{b-2}u_x^3\right)\varphi\right] dtdx \\ - \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0)dx = 0$$

é satisfeita para toda função teste $\varphi \in \mathcal{D}([0,T)\times\mathbb{R})$. *Se* u *é uma solução fraca para todo* $T > 0$, *então ela é chamada de solução fraca global.*

Como resultados preliminares, temos o seguinte teorema:

Teorema 1. *Para toda velocidade de onda* $c > 0$

1. *a função* $u(x,t) = c^{1/b}e^{-|x-ct|}$ *é solução peakon global da equação* (4);
2. *a onda estacionária* $u(x,t) = A\ sign\,(x-c)(e^{-|x-c|}-1)$, *na qual* A *é uma constante arbitrária, é uma solução kink global da equação* (4).

Pretendemos agora estudar a existência de soluções N-*kink* dados como em (3) e de N-*peakon* da forma

$$u = \sum_{i=1}^{N} p_i(t)e^{-|x-q_i(t)|}$$

na tentativa de obter soluções 2-*kink* e 2-*peakon* explícitas mais gerais possíveis. Os casos $N > 2$ geralmente são resolvidos apenas numericamente e não estão no escopo do nosso trabalho.

Agradecimentos

P. L. da Silva agradece a CAPES pelo auxílio pós-doutoral e I. L. Freire agradece ao CNPq (processo número 308941/2013-6) pelo auxílio financeiro.

Referências

[1] A. Degasperis, D. D. Holm and A. N. W. Hone, A new integrable equation with peakon solutions, *Theor. Math. Phys.*, 133:1463–1474, 2002.

[2] J. K. Hunter and B. Nachtergaele, *Applied analysis*, World Scientific, Singapore, 2005.

[3] B. Xia, Z. Qiao, The n-kink, bell-shape and hat-shape solitary solutions of b-family equation in the case of $b = 0$, *Phys. Lett. A*, 377:2340–2342, 2013.

