Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Soluções assintóticas formais de ordem superior de problemas de valor de contorno com coeficientes rapidamente oscilantes

Bruna da Silva Leitzke[1]
PPG Modelagem Matemática, IFM, UFPEL, Pelotas, RS
Leslie D. Pérez Fernández[2]
Departamento de Matemática e Estatística, IFM, UFPEL, Pelotas, RS
Julián Bravo Castillero[3]
Faculdade de Matemática e Computação, Universidade de Havana, Cuba

1 Introdução

O Método de Homogeneização Assintótica (MHA) procura soluções assintóticas formais (SAFs) para problemas com equações diferenciais com coeficientes rapidamente oscilantes [1]. Em aplicações tradicionais do MHA, procura-se uma SAF de primeira ordem formada pela solução do problema homogeneizado corrigida com a solução do problema local. Porém, em diversas situações as SAFs de primeira ordem não conseguem reproduzir os detalhes locais da solução exata do problema. Nesses casos, é necessário considerar SFAs de ordem superior [2]. Neste trabalho, se estuda SAFs de ordem superior para problemas desse tipo:

$$\big(a^\varepsilon(x)(u^\varepsilon(x))'\big)' = f^\varepsilon(x),\ x \in (0,1), \quad u^\varepsilon(x) = 0,\ x \in \{0,1\}, \tag{1}$$

onde $u^\varepsilon(x) \in \mathcal{C}^2([0,1])$, $f^\varepsilon(x) \in \mathcal{C}^0([0,1])$ com $f^\varepsilon(x) = f(x, x/\varepsilon)$ é ε-periódica no segundo argumento e $a^\varepsilon(x) \in \mathcal{C}^1([0,1])$ com $a^\varepsilon(x) = a(x, x/\varepsilon)$ limitado, positivo e ε-periódico. Para resolver o problema (1) se propõe a seguinte SAF

$$u^{(2)}(x) = u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y), \quad y = x/\varepsilon, \tag{2}$$

onde $u_0(x)$ é solução do seguinte problema homogeneizado

$$\hat{a}u_0''(x) = \hat{f}(x),\ x \in (0,1), \quad u_0(x) = 0,\ x \in \{0,1\}. \tag{3}$$

com $\hat{a}$ sendo o coeficiente efetivo. $u_1(x,y)$ e $u_2(x,y)$ são escritas como $u_1(x,y) = N_1(y)u_0'(x)$ e $u_2(x,y) = N_2(y)u_0''(x)$, onde $N_1(y)$ é solução do problema local:

$$\big(a(y)N_1'(y) + a(y)\big)' = 0, \quad N_1(0) = 0. \tag{4}$$

E, sendo $f(x,y) = b(y)u_0''(x)$, $N_2(y)$ é solução do problema local:

$$\big(a(y)N_2'(y)\big)' = -(a(y)N_1(y))' - \hat{a} + b(y), \quad N_2(0) = 0. \tag{5}$$

[1]brunaleitzke@hotmail.com
[2]leslie.fernandez@ufpel.edu.br
[3]jbravo@matcom.uh.cu

2 Resultados

Considere $a(x,y) = 1 + 0.25\cos(2\pi y)$ e $f(x,y) = -1 + \cos(2\pi y)$ no problema (1). De aplicar o MHA, propõem-se uma solução da forma dada em (2) e obtém-se como solução exata $u^\varepsilon(x)$:

$$u^\varepsilon(x) = \int_0^x \left(\int_0^1 \frac{\hat{a}v}{1+0.25\cos(2\pi v/\varepsilon)} dv - \frac{r}{1+0.25\cos(2\pi r/\varepsilon)} \right) dr \\ + \hat{a}\varepsilon^2/\pi^2 \ln|(4+\cos(2\pi/\varepsilon))/5|\, x - \varepsilon^2/\pi^2 \ln|(4+\cos(2\pi x/\varepsilon))/5|. \quad (6)$$

com $\hat{a} = \sqrt{15}/4$. A solução do problema homogeneizado é da forma:

$$u_0(x) = 2/\sqrt{15}(-x^2 + x). \quad (7)$$

E soluções dos problemas locais são obtidas como:

$$N_1(y) = \begin{cases} 0, \quad \text{se} \quad y = 1/2, \\ 1/\pi \arctan\left(\sqrt{3/5}\tan(\pi y)\right) - y, \quad \text{se} \quad 0 < y < 1/2, \\ 1/\pi \arctan\left(\sqrt{3/5}\tan(\pi y)\right) - y + 1, \quad \text{se} \quad 1/2 < y < 1, \end{cases}, \quad (8)$$

$$N_2(y) = 1/\pi^2 \ln|(4+\cos(2\pi y))/5| - \int_0^y N_1(s)ds. \quad (9)$$

3 Conclusões

Através da resolução do problema original (1), via MHA, pôde-se concluir que as SAFs propostas são boas aproximações da solução exata $u^\varepsilon(x)$. Mas observou-se que a SAF $u^{(2)}(x,\varepsilon)$ reproduziu com maior precisão o comportamento local de $u^\varepsilon(x)$ se comparada a SAF $u^{(1)}(x,\varepsilon)$.

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro para o desenvolvimento das atividades científicas e ao apoio do projeto intitulado Desenvolvimento e Aplicações de Métodos Matemáticos de Homogeneização (CAPES no 88881.030424/2013-01).

Referências

[1] N. S. Bakhvalov, G. P. Panasenko. *Homogenisation*: Averaging Processes in Periodic Media. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

[2] F. Su, Z. Xu, Q. Dong, H. Jiang. Multiscale Computation Method for Parabolic Problems of Composite Materials, *Applied Mathematics and Computation*, 217:8337-8342, 2011.

