Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Pontos críticos de funcionais perturbados em um caso degenerado

Heloísa Lopes de Sousa[1]

Pós-Graduação em Matemática, IBILCE, UNESP, São José do Rio Preto, SP

1 Introdução

Estamos interessados em encontrar pontos críticos de funcionais do tipo

$$I_\epsilon(u) = I_0(u) + \epsilon G(u), \tag{1}$$

onde I_0, $G \in C^2(H, \mathbb{R})$, I_0 desempenha o papel do funcional não perturbado e I_ϵ uma perturbação de I_0. H é um espaço de Hilbert munido da norma $\| \, . \, \|$.

2 Pontos críticos para uma classe de funcionais perturbados

Para discutir a existência de pontos críticos de funcionais do tipo (1) vamos supor que exista uma variedade Z_0 de classe C^2, $k-$dimensional, tal que todo $z \in Z_0$ é um ponto crítico de I_0. Dessa maneira Z_0 é uma variedade crítica de I_0. Além disso, suponha conhecido o núcleo do operador $I_0''(z)$ para todo $z \in Z_0$, o qual é dado por

$$Ker(I_0''(z)) = span\, \{e_i \mid 1 \leq i \leq d\}, \quad \forall z \in Z_0,$$

onde $e_i := \dfrac{\partial z_\xi}{\partial \xi_i}$, para todo $1 \leq i \leq k$ e z_ξ denota uma parametrização de Z_0, $\xi \in \mathbb{R}^k$.

Como a inclusão $T_z Z_0 \subseteq Ker(I_0''(z))$ sempre se verifica, então $k \leq d$. Se $k = d$ a teoria clássica em [1] se aplica. Vamos trabalhar no caso onde $k < d$. Neste caso, quando $T_z Z_0 \subsetneq Ker(I_0''(z))$ dizemos que a variedade crítica Z_0 é degenerada.

Considere $z_{\xi,\gamma,\epsilon} = z_\xi + \epsilon \displaystyle\sum_{i=k+1}^{d} \gamma_i e_i$ parametrização de $\tilde{Z}_\epsilon$ tal que $\gamma \in \mathbb{R}^{d-k}$ e e_i é constante em relação a ξ para todo $i = k+1, \cdots, d$.

Note que $\tilde{Z}_\epsilon$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$Z_0 \subsetneq \tilde{Z}_\epsilon, \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad T_z \tilde{Z}_\epsilon = Ker(I_0''(z)), \quad \forall z \in Z_0 \tag{2}$$

[1]heloisalopessousa@hotmail.com

Denotando $W^\epsilon = (T_z\tilde{Z}_\epsilon)^\perp$, vamos procurar pontos críticos de I_ϵ da forma $u = z + w$ onde $z \in \tilde{Z}_\epsilon$ e $w \in W^\epsilon$.

Se $P : H \to W^\epsilon$ denota a projeção ortogonal em W^ϵ então a equação $I'_\epsilon(z + w) = 0$ equivale ao sistema

$$\begin{cases} PI'_\epsilon(z+w) = 0 & \text{equação auxiliar} \\ (Id - P)I'_\epsilon(z+w) = 0 & \text{equação de bifurcação} \end{cases} \tag{3}$$

Logo, achar pontos críticos de I_ϵ equivale a encontrar soluções de (3). Para resolver primeiramente a equação auxiliar é preciso supor que $I''_0(z)$ seja uma aplicação de Fredholm de índice 0, isto é, $dim\, Ker(I''_0(z)) < \infty$, $Im(I''_0(z))$ é fechada e tem codimensão finita e o índice de $I''_0(z)$ é dado por $dim\, Ker(I''_0(z)) - codim\, Im(I''_0(z)) = 0$. Mais precisamente, temos o seguinte:

Lema 2.1. *Suponha* (2) *e que* $I''_0(z)$ *seja uma aplicação de Fredholm de índice* 0*. Dado qualquer subconjunto compacto* $Z_{0,c}$ *de* Z_0*, existe* $\tilde{Z}_{\epsilon,c} \subset \tilde{Z}_\epsilon$ *compacto tal que* $Z_{0,c} \subset int(\tilde{Z}_{\epsilon,c})$ *e* $\epsilon_0 > 0$ *com a seguinte propriedade:* $\forall|\epsilon| < \epsilon_0$ *e* $\forall z \in \tilde{Z}_{\epsilon,c}$ *a equação auxiliar em* (3) *tem uma única solução* $w = w_\epsilon(\xi + \gamma) := w_\epsilon(z)$*, tal que*

(i) $w_\epsilon(z) \in W^\epsilon = (T_z\tilde{Z}_\epsilon)^\perp$ *é de classe* C^1 *com respeito a* $z \in \tilde{Z}_{\epsilon,c}$ *e* $w_\epsilon(z) \to 0$ *quando* $|\epsilon| \to 0$ *uniformemente com respeito a* $z \in \tilde{Z}_{\epsilon,c}$*, junto com sua derivada* w'_ϵ *com respeito a* z*;*

(ii) $\|w_\epsilon(z)\| = O(\epsilon)$ *quando* $\epsilon \to 0$*, para todo* $z \in \tilde{Z}_{\epsilon,c}$*.*

Para resolver a equação de bifurcação em (3) vamos considerar o funcional reduzido $\Phi_\epsilon : \tilde{Z}_\epsilon \to \mathbb{R}$ dado por $\Phi_\epsilon(z_{\xi,\gamma,\epsilon}) = I_\epsilon(z_{\xi,\gamma,\epsilon} + w_\epsilon(z))$.

Theorem 2.1. *Sejam* $I_0, G \in C^2(H, \mathbb{R})$*, suponha* (2) *e que* $I''_0(z)$ *seja uma aplicação de Fredholm de índice* 0*. Dado qualquer subconjunto compacto* $Z_{0,c}$ *de* Z_0*, considere* $\tilde{Z}_{\epsilon,c}$ *dado pelo Lema anterior e suponha que* Φ_ϵ *tenha, para* $|\epsilon|$ *suficientemente pequeno, um ponto crítico* $z_\epsilon \in \tilde{Z}_{\epsilon,c}$*. Então,* $u_\epsilon = z_\epsilon + w_\epsilon(z_\epsilon)$ *é um ponto crítico de* $I_\epsilon = I_0 + \epsilon G$*.*

Para obter o resultado foi estudada e adaptada uma das várias tecnicas de perturbação apresentadas em [1]. O método que adaptamos foi introduzido pela primeira vez por Ambrosetti e Badiale em [2, 3]

Referências

[1] A. Ambrosetti and A. Malchiodi *Perturbation Methods and Semilinear Elliptic Problems on* $\mathbb{R}^n$.Birkhäuser, Progress in Mathematics, vol. 240, (2006).

[2] A. Ambrosetti and M. Badiale,*Homoclinics: Poincaré-Melnikov type results via a variational approach*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lin., 15 (1998), 233-252.

[3] A. Ambrosetti and M. Badiale, *Variational perturbative methods and bifurcation of bounds states form the essential spectrum*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 128 (1998), 1131- 1161.

