

CONTROLE TOLERANTE A FALHAS PARA SISTEMAS LINEARES COM SALTOS MARKOVIANOS VIA ATUADORES VIRTUAIS

CRISTIANE NESPOLI*, LUANA H. TAKAMOTO*

*Unesp

*Departamento de Matemática e Computação
Presidente Prudente, SP, Brasil*

Emails: nespoli.cristiane@gmail.com, luhidemi@gmail.com

Abstract— In this paper a Fault Tolerant Control (FTC) strategy using a virtual actuator is developed for Markovian Jump Linear Systems (MJLS) with partly unknown transition probabilities. The main idea of the virtual actuator approach is to reconfigure the control loop such that the nominal controller in use can be kept in the loop at all times even after actuator failures occur. Instead of adapting the controller to the faulty plant this FTC method adapts the faulty plant to the nominal controller. The MJL virtual actuator is designed using Linear Matrix Inequalities (LMIs). One such scheme using virtual actuator for MJLS was still not proposed to the best of the author's knowledge.

Keywords— Fault Tolerant Control, Markov Jump Linear System, Virtual Actuator.

Resumo— Neste trabalho uma estratégia de Controle Tolerante a Falhas (CTF) baseada no uso de atuadores virtuais é estendida para uma classe de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSM) com probabilidades de transição parcialmente desconhecidas. A principal ideia do esquema de CTF usando atuadores virtuais consiste em reconfigurar o sistema de controle de modo a manter o controlador nominal em uso mesmo em caso de falhas nos atuadores. O problema de reconfiguração proposto consiste em determinar um controlador reconfigurado que garanta a estabilidade estocástica do sistema e o desempenho H_∞ . Neste sentido, o atuador virtual LSM é obtido através de um problema de otimização envolvendo Inequações Lineares Matriciais.

Palavras-chave— Controle Tolerante a Falhas, Sistema Linear com Salto Markoviano, Atuador Virtual

1 Introdução

O avanço tecnológico testemunhado nas últimas décadas permitiu a integração de sensores, atuadores, controladores e microprocessadores inteligentes nos sistemas de controle automático, contribuindo para a aplicação de modernos sistemas de controle integrados em um número considerável de setores industriais. Em contrapartida, a demanda por eficiência e confiabilidade destes sistemas de controle automático aumentou, estimulada pelo crescimento econômico assim como pelos requisitos ecológicos, de qualidade e segurança que envolvem a indústria moderna. Por sua vez, a ampla interconexão presente entre os componentes nos sistemas de controle integrados faz com que uma falha em um deles possa levar todo o processo de operação a um colapso. Dessa forma, a rápida detecção do mau funcionamento do sistema e o correto diagnóstico de sua causa é fundamental para que se tomem medidas eficazes no sentido de acomodar ou reconfigurar o sistema, buscando adaptá-lo a sua nova situação. Os sistemas de controle tolerantes a falhas (CTF) combinam de forma integrada diagnóstico e identificação de falhas (DIF), e reconfiguração de controle de modo a evitar, ou minimizar, a degradação do sistema. De acordo com Blanke et al. (2006), o objetivo do sistema CTF consiste em manter desejável índice de performance e preservar as condições de estabilidade na presença de falhas. A capacidade de acomodação de um sistema de controle depende de fatores tais como severidade da

falha, robustês do sistema nominal e mecanismos que introduzem redundância em sensores ou atuadores. Segundo a literatura, as estratégias para CTF envolvem dois grupos de técnicas: ativas e passivas. As técnicas ativas consistem em adaptar a lei de controle de acordo com as informações obtidas junto ao bloco de DIF, ver Blanke et al. (2006). De outro lado, nas técnicas denominadas passivas, a lei de controle empregada deve ser capaz de tolerar falhas, dentro de certos limites, permitindo que o sistema se “acomode” com a presença da falha. O cenário atual das pesquisas em CTF/DIF pode ser encontrado em (Ding, 2012), vide também (Patton, 1997).

Recentemente, atuadores virtuais¹ têm sido propostos como estratégia na acomodação de falhas. A principal característica da reconfiguração de controle baseada em atuadores virtuais consiste na reconfiguração da planta na presença de falta, de modo a manter o controlador nominal, sem necessidade de resintonizá-lo. A planta, com falha no atuador, é modificada através de um bloco denominado atuador virtual (AV). Este bloco tem como função “mascarar” a falha permitindo ao controlador “ver” a mesma planta anterior a sua ocorrência. Esta aproximação está ilustrada na Fig.1 (Seron e Doná, 2009). Ela consiste de uma planta com entrada u_c , saída medida y e saída a ser controlada z , além de um controlador nominal

¹Atuadores virtuais foram originalmente propostos por Lunze (2006), Richter et al. (2007). e Blanke et al. (2006).

com entrada u_c e saída y_c . Em condições “saúdáveis” de operação, a planta e o controlador nominal são interconectadas ajustando $y_c = y$ e $u_c = u$, como indicado nas linhas sólidas da Fig.1 Quando os atuadores, ou outros componentes do sistema, falham e interrompem a malha de controle, faz-se necessário reconfigurar o sistema de controle modificando sua estrutura. Uma solução para este problema de reconfiguração, baseada no uso de um AV, consiste em tentar aplicar uma mudança mínima na malha de controle. Por último, tem-se um sistema dinâmico com entradas y e u_c saídas y_c e u (ver Fig.1), as quais somente interferem com a malha nominal quando a falha no atuador é detectada. Neste caso, o papel do AV consiste em gerar novas interconexões (como indicado pelas cruzes tracejadas na Fig.1) as quais, juntamente com a planta *sob falta*, produzem, para uma entrada u_c , a mesma (ou aproximadamente a mesma) saída y_c da planta nominal.

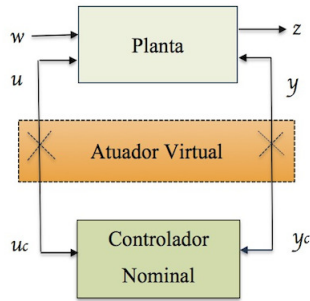


Figura 1: Princípio da reconfiguração de controle usando AV.

Por sua vez, uma linha de pesquisa que há mais de cinco décadas tem despertado o interesse de pesquisadores é a dos Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSM). Os SLSM pertencem à classe dos sistemas híbridos, uma vez que um dos estados assume valores contínuos ao passo que o outro estado, referido como *modo de operação do sistema*, assume valores discretos em um conjunto finito. Estes sistemas são apropriados para modelar sistemas sujeitos a mudanças abruptas em seus parâmetros, devido a falhas em componentes, variações ambientais repentinas, entre outras. Dentre os sistemas dinâmicos físicos que podem ser modelados pelos SLSM temos os sistemas de potência, sistemas aeroespaciais e sistemas de controle interconectados (vide Costa et al. (2005) e referências contidas).

Neste trabalho propomos uma estratégia de CTF usando um atuador virtual para uma classe de SLSM com probabilidades parcialmente desconhecidas. A ideia é reconfigurar o sistema de controle de modo que o controlador nominal markoviano possa ser mantido, mesmo na presença de falha no atuador, garantidas as propriedades desejáveis, como por exemplo estabilidade e desempenho H_∞ . Em outras palavras, a tarefa consiste

em encontrar um controlador “reconfigurado” que estabilize a planta com falta e garanta a performance H_∞ . Tanto quanto é do conhecimento dos autores, a reconfiguração de controle envolvendo atuadores virtuais não foi ainda estendida para os SLSM.

O artigo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 descreve a classe de SLSM adotada assim como resultados básicos associados, envolvendo estabilidade estocástica e desempenho H_∞ . Na Seção 3, o atuador virtual para o SLSM é apresentado, incluindo a definição do sistema *sob falta* e a formulação do problema de reconfiguração baseado no atuador virtual para o SLSM adotado. Na Seção 4, a solução é apresentada através de um problema de otimização envolvendo inequações lineares matriciais.

Notação: Utilizamos a notação padrão como segue. \mathbb{R}^n denota o espaço Euclidiano de dimensão n ; \mathbb{N}^+ o conjunto dos inteiros positivos e $l_2[0, \infty)$ representa o espaço das sequências infinitas somáveis sendo que a norma de $w = \{w(k) \in l_2[0, \infty)\}$ é dada por $\|w\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |w(k)|^2$. No espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$, Ω representa o espaço amostral, \mathfrak{F} a sigma-álgebra de subconjuntos do espaço amostral e \mathcal{P} a medida de probabilidade sobre \mathfrak{F} . O símbolo $E[\cdot]$ indica o valor esperado de $[\cdot]$ e a norma de $z = \{z(k) \in l_2((\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P}), [0, \infty))\}$ é dada por $\|z\|_{E_2}^2 = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} |z(k)|^2\right]$. Nas matrizes bloco simétricas o símbolo $*$ indica cada um dos respectivos blocos simétricos e $\text{diag}\{\dots\}$ indica uma matriz bloco-diagonal. As matrizes cujas dimensões não estão especificadas têm dimensões compatíveis com as operações algébricas envolvidas. Por sua vez, a notação $M > 0$ indica uma matriz simétrica real positiva definida.

2 SLSM e resultados básicos

Considere a classe dos SLSM \mathcal{S} definidos sobre o espaço de probabilidade fundamental $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\theta_k)x(k) + B(\theta_k)u(k) + E(\theta_k)w(k) \\ z(k) &= C(\theta_k)x(k) + D(\theta_k)u(k), \\ y(k) &= G(\theta_k)x(k) \end{aligned} \quad (1)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$; $u(k) \in \mathbb{R}^p$ é o controle, $y(k) \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida, $z(k)$ é a saída a ser controlada e $w(k) \in \mathbb{R}^l$ é o distúrbio que pertence a $l_2[0, \infty)$.

A cadeia de Markov homogênea a tempo discreto $\{\theta_k; k \geq 0\}$ tem espaço de estados $S = \{1, \dots, N\}$, distribuição inicial $\mu_0 = P(\theta_0 = i)$, probabilidades de transição

$$p_{ij} := P(\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i), \forall i, j \in S, k \geq 0,$$

onde $p_{ij} \geq 0 \forall i, j \in S$ com $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$, e matriz de probabilidade de transição $P = [p_{ij}]$.

Quando $\theta_k = i \in S$ diz-se que o sistema está no modo de operação i e denotam-se suas matrizes por A_i, B_i, C_i, D_i, E_i e G_i , as quais são reais e de dimensões apropriadas.

Adicionalmente, considera-se que alguns elementos da matriz P são desconhecidos. Como exemplo, supondo que o sistema tenha quatro modos de operação, P pode ter a forma

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & ? & p_{13} & ? \\ ? & ? & ? & p_{24} \\ p_{31} & ? & p_{33} & ? \\ ? & ? & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix},$$

onde $?$ representa elementos inacessíveis. Consideramos $\forall i \in S$, a partição $S = S_{\mathcal{K}}^i \cup S_{\mathcal{UK}}^i$ com

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{K}}^i &:= \{j : p_{ij} \text{ é conhecido}\}, \\ S_{\mathcal{UK}}^i &:= \{j : p_{ij} \text{ é desconhecido}\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Se $S_{\mathcal{K}}^i \neq \emptyset$ então $S_{\mathcal{K}}^i = (\mathcal{K}_1^i, \dots, \mathcal{K}_m^i)$, qualquer que seja $1 \leq m \leq N$, onde $\mathcal{K}_m^i \in \mathbb{N}^+$ representa o m -ésimo elemento conhecido com índice \mathcal{K}_m^i na i -ésima fila da matriz P .

Na literatura envolvendo os SLSM, em geral assume-se que o acesso ao processo de saltos $\theta_k, k \geq 0$ é completamente acessível ou, do contrário, completamente inacessível ao controlador, cf. (Zhang e Boukas, 2009b). Além disso, as probabilidades de transição com incertezas politópicas ou limitadas em norma exigem o conhecimento de limites ou da estrutura das incertezas.

Em condições nominais assumimos que o controle de realimentação de saída do sistema (1) tem estrutura dependente do modo, dada por

$$\begin{aligned} x_d(k+1) &= A_d(\theta_k)x_d(k) + B_d(\theta_k)y(k) \\ u(k) &= C_d(\theta_k)x_d(k) + D_d(\theta_k)y(k), \end{aligned} \quad (3)$$

onde $x_d(k) \in \mathbb{R}^n$, $x_d(0) = 0$ e as matrizes A_{di}, B_{di}, C_{di} e D_{di} , com $i \in \mathfrak{X}$, têm dimensões apropriadas. Além disso, assumimos que o modo de operação θ_k do sistema no tempo k é acessível ao controlador (3) e que este estabiliza o processo nominal (1) no sentido da Definição 1.

O sistema (1) com (3) e $\tilde{x}(k) =: [x^T(k) \ x_d^T(k)]$ é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{E}(\theta_k)w(k) \\ z(k) &= \tilde{C}(\theta_k)\tilde{x}(k) \end{aligned} \quad (4)$$

onde $\tilde{C}_i = [C_i \ 0]$, $\tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_i \\ 0 \end{bmatrix}$ e

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i D_{di} C_{yi} & B_i C_{di} \\ B_{di} C_{yi} & A_{di} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Vale notar que o sistema (4) também constitui um SLSM com probabilidades parcialmente desconhecidas (2).

Definição 1 O sistema (4) com $w(k) = 0$ é estocasticamente estável se para cada condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\theta_0 \in S$

$$E\left[\sum_{k \geq 0} \|x(k)\|^2\right] < \infty.$$

Definição 2 A norma H_∞ de um sistema estocasticamente estável (4) da entrada w para a saída z é dada por

$$\|S\|_\infty^2 = \sup_{\theta_0 \in S, 0 \neq w \in l_2} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2}$$

para toda $w(k) \in l_2(0, \infty)$ não-nula.

Proposição 1 (Zhang e Boukas, 2009b) O sistema (4) com $w(k) = 0$ e probabilidades de transição parcialmente desconhecidas (2) é estocasticamente estável se existirem matrizes $M_i > 0$, $i \in S$ tais que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S_{\mathcal{K}}^i} \tilde{A}_i' p_{ij} M_j \tilde{A}_i - \sum_{j \in S_{\mathcal{K}}^i} p_{ij} M_i &< 0, \quad \forall j \in S_{\mathcal{K}}^i \\ \tilde{A}_i' M_j \tilde{A}_i - M_i &< 0, \quad \forall j \in S_{\mathcal{UK}}^i. \end{aligned} \quad (6)$$

Definição 3 Dado um escalar $\gamma > 0$, o sistema (4) com $w(k) = 0$ é dito ser estocasticamente estável e ter índice γ de desempenho H_∞ se é estocasticamente estável e

$$\|z\|_{E_2} \leq \gamma \|w\|_2,$$

$\forall w(k) \in l_2[2, \infty)$, não-nula.

A proposição a seguir fornece uma condição suficiente para um critério de desempenho H_∞ para o sistema (4) com probabilidades de transição parcialmente desconhecidas (2). Na verdade, trata-se do conhecido *Lema real limitado* (ver Seiler e Sengupta, 2003) adaptado para a classe de sistemas adotada.

Proposição 2 (Zhang e Boukas, 2009a) Considere o sistema (4) com probabilidades parcialmente desconhecidas (2) e $\gamma > 0$ constante. Se existir um conjunto de matrizes $L_1 > 0, \dots, L_N > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{\mathcal{K}}^i & 0 & \mathcal{L}_{\mathcal{K}}^i \tilde{A}_i & \mathcal{L}_{\mathcal{K}}^i \tilde{E}_i \\ * & -p_{\mathcal{K}}^i I & p_{\mathcal{K}}^i \tilde{C}_i & 0 \\ * & * & -p_{\mathcal{K}}^i L_i & 0 \\ * & * & * & -p_{\mathcal{K}}^i \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad \forall j \in S_{\mathcal{K}}^i \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} -L_j & 0 & L_j \tilde{A}_i & L_j \tilde{E}_i \\ * & -I & \tilde{C}_i & 0 \\ * & * & -L_i & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad \forall j \in S_{\mathcal{UK}}^i \quad (8)$$

onde $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}^i = \sum_{j \in S_{\mathcal{K}}^i} p_{ij} L_j$ e $p_{\mathcal{K}}^i = \sum_{j \in S_{\mathcal{K}}^i} p_{ij}$. Então o sistema (4) é estocasticamente estável com índice γ de desempenho H_∞ .

3 Atuador Virtual para SLSM

3.1 Sistema sob falta

A falha em um atuador do SLSM \mathcal{S} em (1) é modelada trocando-se a matriz $B(\theta_k)$ pela matriz $B_f(\theta_k, \gamma_k)$. Como exemplo, se o s -ésimo atuador é perdido então a s -ésima coluna de $B(\theta_k)$ é anulada. Mais especificamente, $B_f(\theta_k, \gamma_k) = B(\theta_k)F(\gamma_k)$ onde $F(\gamma_k) = \text{diag}(\gamma_1(k), \gamma_2(k), \dots, \gamma_p(k))$, com $\gamma_s \in \{0, 1\}$. O caso $\gamma_s(k) = 0$ representa a perda total e o caso $\gamma_s(k) = 1$ representa a situação saudável do s -ésimo atuador no tempo k , respectivamente. Assume-se que o processo sob a ocorrência da falta é ainda observável e controlável e portanto o projeto de controle por realimentação de saída pode ser proposto para o sistema *sob falta*.

O sistema \mathcal{S} *sob falta*, denotado \mathcal{S}_f , é dado por

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A(\theta_k)x_f(k) + B_f(\theta_k, \gamma_k)u_f(k) \\ &\quad + E(\theta_k)w(k) \\ z_f(k) &= C_z(\theta_k)x_f(k) \\ y_f(k) &= C_y(\theta_k)x_f(k). \end{aligned} \quad (9)$$

A entrada para o sistema \mathcal{S}_f , denotada por $u_f(k)$, é diferente de $u(k)$ porque em geral a falta muda o comportamento da malha. Depois da ocorrência da falta, o sistema em malha fechada formado pelo sistema \mathcal{S}_f e o controlador nominal \mathcal{S}_c , em geral, não é adequado. Em resumo, o problema de reconfiguração aqui proposto consiste em encontrar um novo controlador \mathcal{S}_r tal que o sistema formado por \mathcal{S}_f e \mathcal{S}_r é estável e, tanto quanto possível, atinge as metas de controle estipuladas. A estratégia consiste em aumentar o sistema em malha fechada \mathcal{S}_f através de um bloco de reconfiguração \mathcal{S}_A , denominado *Atuador Virtual* com uma variável de estado x_v (condição inicial x_{v0}), que é interconectada com a planta \mathcal{S}_f e o controlador nominal \mathcal{S}_c através do par de sinais (u_f, y_f) e (u_c, y_c) . Junto com a planta \mathcal{S}_f , o bloco de reconfiguração \mathcal{S}_A forma o *sistema reconfigurado* $\mathcal{S}_r = (\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_A)$, no qual o controlador (3) é conectado. Visto a partir da planta \mathcal{S}_f o controlador reconfigurado é dado pela interconexão $\mathcal{S}_r = (\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_c)$.

3.2 Atuador Virtual e SLSM

O conceito de atuador virtual introduzido em Blanke et al. (2006) pode ser agora estendido para a classe de SLSM (1). Adotamos as notações $B_f(\theta_k, \gamma_k) := B_{fi}(\gamma_k)$ e $N(\theta_k, \gamma_k) := N_i(\gamma_k)$ (o índice i corresponde a $\theta_k = i$) onde $B_{fi}(\gamma_k) = B_i \text{diag}(\gamma_1(k), \gamma_2(k), \dots, \gamma_p(k))$ e $N_i(\gamma_k)$ é definida abaixo. Considerando o sistema \mathcal{S}_f , se a condição sobre o rank a seguir é válida, isto é, se

$$\text{rank}(B_{fi}(\gamma_k)) = \text{rank}[B_i \ B_{fi}(\gamma_k)] \quad (10)$$

então a estrutura de reconfiguração

$$u_f(k) = N_i(\gamma_k)u_c(k) \quad (11)$$

onde $N_i(\gamma_k)$ satisfaz [ver Blanke, pg. 326]

$$B_{fi}(\gamma_k)N_i(\gamma_k) = B_i, \quad (12)$$

com $N_i(\gamma_k) = B_{fi}^+(\gamma_k)B_i$ onde $B_{fi}^+ = (B_{fi}'B_{fi})^{-1}B_{fi}'$ é a pseudo-inversa de $B_{fi}(\gamma_k)$. Quando é válida a condição (10) $u_f(k)$ dada por (11) faz com que os sistemas \mathcal{S}_r e \mathcal{S} tenham o mesmo comportamento sob o ponto de vista do controlador, ou seja, $y_f(k) = y(k)$ (denominada *meta da falta oculta*). Por outro lado, caso a condição (10) não seja satisfeita, considera-se o atuador virtual definido como segue.

Definição 4 Considere a planta \mathcal{S}_f . O atuador virtual \mathcal{S}_A é definido como

$$\begin{aligned} x_v(k+1) &= A_v(\theta_k)x_v(k) + B_v(\theta_k)u_c(k) \\ u_f(k) &= N(\gamma_k)u_c(k) + u_v(k) \\ u_v(k) &:= M(\theta_k)x_v(k) \\ y_c(k) &= C_y(\theta_k)x_v(k) + y_f(k) \end{aligned} \quad (13)$$

onde $N(\gamma_k) := \text{diag}(n_1(k), \dots, n_p(k))$ com $n_j(k) = 1$ se $\gamma_j > 0$ e $n_j(k) = 0$ se $\gamma_j = 0$. As matrizes do espaço de estados são dadas por

$$\begin{aligned} A_v(\theta_k) &:= A(\theta_k) + B_f(\theta_k, \gamma_k)M(\theta_k) \\ B_v(\theta_k) &:= B(\theta_k) - B_f(\theta_k, \gamma_k)N(\gamma_k). \end{aligned} \quad (14)$$

Como anteriormente, o controle reconfigurado $u_f(k)$ em (13) também faz com que $y_c(k) = y(k)$, vide Blanke et al. (2006). Para simplificar adotaremos as notações A_{vi} , B_{vi} , e M_i quando $\theta_k = i$.

O sistema \mathcal{S} , em condições normais, é controlado por (3). Por outro lado, sob falta, \mathcal{S}_f é reconfigurado via atuador virtual tal que $y(k)$ em (3) é trocado por $y_c(k)$ dado em (13). Assim a dinâmica do controle nominal satisfaz

$$x_d(k+1) = A_{di}x_d(k) + B_{di}C_{yi}(x_v(k) + x_f(k)). \quad (15)$$

Dessa forma, o modelo aumentado formado por \mathcal{S}_f , \mathcal{S}_A e (15) é dado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_d(k+1) \\ x_f(k+1) \\ x_v(k+1) \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} A_{di} & B_{di}C_{yi} & B_{di}C_{yi} \\ 0 & A_i & -B_{fi}M_i \\ 0 & 0 & A_i + B_{fi}M_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(k) \\ x_f(k) \\ x_v(k) \end{bmatrix} &+ \\ \begin{bmatrix} 0 \\ B_i^* \\ B_i - B_i^* \end{bmatrix} u_c(k), \end{aligned} \quad (16)$$

onde $B_i^* := B_{fi}(\gamma_k)N(\gamma_k)$. Definindo $\bar{x}(k) := x_f(k) + x_v(k)$ e tomando $u_c(k) = C_{di}x_d(k)$ (adotamos $D_d(\theta_k) = 0$ em (3) por simplicidade), o

sistema (16) pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(k+1) \\ x_d(k+1) \\ x_v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i C_{di} & 0 \\ B_{di} C_{yi} & A_{di} & 0 \\ 0 & (B_i - B_i^*) C_{di} & A_i + B_{fi} M_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ x_d(k) \\ x_v(k) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Considerando $\xi(k) := [\bar{x}^T(k) \ x_d^T(k)]$, \tilde{A}_i definido (5) e $\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & (B_i - B_i^*) C_{di} \end{bmatrix}$ temos

$$\begin{bmatrix} \xi(k+1) \\ x_v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & 0 \\ \tilde{B}_i & A_i + B_{fi} M_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ x_v(k) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Desta forma, podemos notar que o princípio da separação se aplica ao modelo acima, ou seja, o conjunto σ dos autovalores do sistema (18) é dado pela união do conjunto dos autovalores do sistema nominal em malha fechada com o conjunto dos autovalores do atuador virtual. Assim $\sigma = \sigma\{\tilde{A}_i\} \cup \sigma\{A_i + B_{fi} M_i\}$, e portanto, o controle nominal e o atuador virtual podem ser projetados de forma independente.

3.3 Problema de Reconfiguração

As definições a seguir, adaptadas de Richter e Lunze (2009), contêm metas que permitirão estabelecer o problema de reconfiguração proposto neste trabalho.

Definição 5 O sistema reconfigurado $(\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_A, \mathcal{S}_c)$ alcança a meta de recuperação da trajetória estável se é estocasticamente estável, e, para qualquer condição inicial x_0 existe uma condição inicial x_{v0} tal que as respostas $z_f(k)$ e $z(k)$ sejam as mesmas, isto é,

$$z_v(k) := z(k) - z_f(k) = 0, \quad \forall w(k).$$

Definição 6 Sejam \mathcal{S}_A^* e \mathcal{S}_A atuadores virtuais que dão origem ao sistema $(\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_A^*, \mathcal{S}_c)$ e $(\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_A, \mathcal{S}_c)$, com saídas controladas z_f^* e z_f , respectivamente. O sistema em malha fechada reconfigurado com o atuador virtual \mathcal{S}_v^* , aproxima a meta de recuperação da trajetória estável se $(\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_A^*, \mathcal{S}_c)$ é estocasticamente estável, para qualquer x_0 e $u_c(k)$: vale

$$\frac{\|z - z_f^*\|_2}{\|u_c\|_2} < \frac{\|z - z_f\|_2}{\|u_c\|_2}.$$

Problema de Reconfiguração PR. Dado o sistema (1), o controle nominal (3) e o sistema sob falta (9), encontrar um bloco ótimo de reconfiguração \mathcal{S}_r^* que (i) atinge a meta da falta oculta; (ii) satisfaz a meta da recuperação da trajetória estável, caso (10) seja satisfeita e; (iii) satisfaz a meta

da aproximação ótima da recuperação da trajetória estável, caso (10) seja violada.

O problema acima pode ser formulado equivalentemente da forma (ver Richter, 2009b)

$$\gamma_z := \min_{M_i} \|\mathcal{S}_z\|_\infty.$$

considerando a norma H_∞ do sistema estável \mathcal{S}_A da entrada u_c para a saída z_v e escrevendo

$$\mathcal{S}_z := (A_{vi}, B_{vi}, C_{zi}, 0).$$

4 Resultado Principal

O Teorema a seguir, adaptado de Zhang e Boukas (2009a), apresenta a solução do problema de reconfiguração proposto acima.

Teorema 1 O atuador virtual (13) com os parâmetros N_i como em (12) e M_i escolhido como solução ótima do problema de otimização

$$\begin{aligned} \min_{X_i, Y_i} \gamma_z \quad \text{sujeito a :} \\ \begin{bmatrix} -\mathcal{X}_{\mathcal{K}}^i & 0 & \mathcal{L}_{\mathcal{K}}^i(A_i X_i + B_i^* Y_i) & \mathcal{L}_{\mathcal{K}}^i(B_i - B_i^*) \\ * & -p_{\mathcal{K}}^i I & p_{\mathcal{K}}^i C_i X_i & 0 \\ * & * & -p_{\mathcal{K}}^i X_i & 0 \\ * & * & * & -p_{\mathcal{K}}^i \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \\ \forall j \in \mathcal{S}_{\mathcal{K}}^i, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -X_j & 0 & A_i X_i + B_i^* Y_i & X_j E_i \\ * & -I & C_i X_i + D_i Y_i & F_i \\ * & * & -X_i & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \\ \forall j \in \mathcal{S}_{u\mathcal{K}}^i \end{aligned} \quad (20)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{K}}^i &:= [\sqrt{p_{i\mathcal{K}_1^i}} I, \dots, \sqrt{p_{i\mathcal{K}_m^i}} I] \\ \mathcal{X}_{\mathcal{K}}^i &:= \text{diag}[X_{\mathcal{K}_1^i}, \dots, X_{\mathcal{K}_m^i}]. \end{aligned}$$

e $X_i = X_i' > 0$, resolve o problema de reconfiguração PR.

Prova: Aplicando a Proposição 1 tem-se que o sistema (4) é estocasticamente estável e atinge um índice de desempenho H_∞ sob as probabilidades de transição parcialmente desconhecidas (2) se as inequações (7) e (8) são válidas. Usando complemento Schur, temos que (7) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -l_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & r_{l1} \tilde{A}_i & r_{l1} \tilde{E}_i \\ * & -l_2 & \ddots & \vdots & \dots & r_{l2} \tilde{A}_i & r_{l2} \tilde{E}_i \\ * & * & \ddots & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ * & * & * & -l_m & 0 & r_{lm} \tilde{A}_i & r_{lm} \tilde{E}_i \\ * & * & * & * & -p_{\mathcal{K}}^i I & p_{\mathcal{K}}^i \tilde{C}_i & 0 \\ * & * & * & * & * & -p_{\mathcal{K}}^i L_i & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -p_{\mathcal{K}}^i \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0$$

onde adotamos $l_k := \mathcal{L}_{\mathcal{K}_k^i}$ e $r_k := \sqrt{p_{i\mathcal{K}_k^i}}$, $k = 1, \dots, m$. Considere agora o sistema S_z com entrada de controle (13). Assim, na inequação anterior, fixando $X_i = L_i^{-1}$, realizando uma transformação de congruência $\text{diag}[\mathcal{X}_{\mathcal{K}}^i, I, X_i, I]$ e trocando a variável $Y_i := M_i X_i$, obtemos (19). Da mesma forma, utilizando complemento Schur, podemos obter (20) a partir da inequação (8). Portanto, se (19) e (20) são válidas, as inequações (7) e (8) são satisfeitas na Proposição 2. Através da solução do conjunto de LMIs acima, as soluções M_i procuradas são então obtidas. \square

5 Conclusão

Este trabalho apresenta uma estratégia de reconfiguração de controle para Sistemas Lineares com Saltos Markovianos baseada no uso de atuadores virtuais. A classe de SLSM adotada possui probabilidades de transição parcialmente desconhecidas. A principal característica deste esquema consiste na reconfiguração da planta na presença de falta, de modo a manter o controlador nominal, sem necessidade de ressintonizá-lo. A planta, com falha no atuador, é modificada através de um bloco denominado atuador virtual cuja função é “mascarar” a falta permitindo ao controlador “ver” a mesma planta anterior a sua ocorrência. A vantagem deste método é que ele objetiva aplicar uma mudança mínima na malha de controle quando da ocorrência de falha nos atuadores. Ou seja, o controlador nominal usado na planta livre da falta, garantindo estabilidade estocástica e índice de desempenho H_∞ , pode ser mantido no sistema *sob falta* mantendo garantidas estas especificações. O problema de reconfiguração é resolvido através da solução ótima de um problema de otimização H_∞ que envolve inequações lineares matriciais.

Agradecimentos

À Pró-Reitoria de Pós-Graduação da Unesp pelo apoio financeiro. À Maria Marta Seron, pesquisadora da Universidade de Newcastle, Australia, pelas valiosas contribuições envolvendo os Atuadores Virtuais.

Referências

- Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J. and Staroswiecki, M. V. (2006). *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*, 2nd edition edn, Springer.
- Costa, O., Fragoso, M. and Marques, R. (2005). *Discrete-Time Markov Jump Linear System*, Springer-Verlag.
- Ding, S. (2012). A survey of fault-tolerant networked control system design, *Preprints of the 7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, Mexico City, Mexico*.
- Lunze, J. (2006). Control reconfiguration after actuator failures: The generalised virtual actuator, *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, Beijing, China* pp. 1309–1314.
- Patton, R. J. (1997). Fault-tolerant control systems: The 1997 situation, *Proceedings of the IFAC Symposium, Hull, UK* **2**: 1033–1055.
- Richter, J. and Lunze, J. (2009). H_∞ -based virtual actuator synthesis for optimal trajectory recovery, *Preprints of the 8th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, Barcelona, Spain*.
- Richter, J., Schlage, T. and Lunze, J. (2007). Control reconfiguration of a thermofluid process by means of a virtual actuator, *IET Proceedings on Control Theory and Applications* **1**(6): 1606–1620.
- Seiler, P. and Sengupta, R. (2003). A bounded real lemma for jump systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(9): 1651–1654. DOI: [10.1109/TAC.2003.817010](https://doi.org/10.1109/TAC.2003.817010)
- Seron, M. M. and Doná, J. D. (2009). Fault tolerant control using virtual actuators and invariant-set based fault detection and identification, *Proceedings of 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, P.R. China* pp. 7801–7806.
- Zhang, L. and Boukas, E.-K. (2009a). H_∞ control for discrete-time markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities, *Int. Journal of Robust Nonlinear Control* **19**: 868–883. DOI: [10.1002/rnc.1355](https://doi.org/10.1002/rnc.1355)
- Zhang, L. and Boukas, E.-K. (2009b). Stability and stabilization of markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities, *Automatica* **45**: 463–468. DOI: [10.1016/j.automatica.2009.02.002](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.02.002)