Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Técnicas analíticas de resolução de modelos Reação-Difusão

Daiane Frighetto Frighetto[1]
Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, RS
Camila Pinto da Costa[2]
Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, RS
Alexandre Molter[3]
Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, RS

1 Introdução

O modelo de Reação-Difusão é constituído pela combinação de um modelo difusivo linear com um termo de reação muito utilizados para descrever fenômenos biológicos. A propagação da espécie se dá através de uma onda que viaja sem mudar a sua forma, o que torna possível encontrar uma solução analítica no estado estacionário do tipo onda viajante. Essa solução pode ser obtida de forma exata através das técnicas de resolução de equações diferencias ordinárias, bem como, consegue-se encontrar uma solução aproximada supondo uma solução assintótica formal composta por uma série de potências do parâmetro pequeno ε, através do método da perturbação.

2 Solução analítica por onda viajante

Nesse trabalho considera-se a modelo de Fisher-Kolmogorov na forma adimensional: $w_t - Dw_{xx} = w(a-bw)$, onde o termo D é o coeficiente de difusibilidade, k é a capacidade de suporte, a, a taxa de crescimento, w representa a densidade da população em questão e $b = a/k$ a competição entre os indivíduos da mesma espécie.

A solução analítica da equação pode ser determinada pela solução do tipo onda viajante, conforme [2], sendo $w(x,t) = w(x-ct) = W(z)$, onde $z = x - ct$, e $w(x,t)$ onde c é a velocidade constante da onda no sentido positivo de x. Assumindo essa simplificação, pode ser reduzida para uma equação uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de segunda ordem não linear dada por:

$$W'' + cW' - W^2 + W = 0. \tag{1}$$

[1]daiane.frighetto@gmail.com
[2]camila.costa@ufpel.edu.br
[3]alexandre.molter@ufpel.edu.br

Pretende-se encontrar uma solução de frente de onda que satisfaça os limites: $\lim\limits_{z\to\infty} W(z) = 0$ e $\lim\limits_{z\to-\infty} W(z) = 1$. Essa equação pode ser escrita num sistema de EDOs de primeira ordem. Utilizando os limites definidos anteriormente e as devidas substituições chega-se a uma EDO de primeira ordem que pode ser resolvida pelo método da separação de variáveis ou pelo método de Bernoulli. Considerando $C_1 = e^{\tau}$, e τ uma constante de integração, obtém-se a solução exata:

$$W(z) = \frac{1}{1 + C_1 e^{z/c}}, \tag{2}$$

Outra alternativa para encontrar a solução analítica da equação em questão é o método da perturbação, que depende da existência de um parâmetro adimensional no problema. Considera-se a solução de onda viajante com esse argumento geométrico para obter uma solução aproximada da EDO (1) no caso de $c \geq 2$. O método consiste em encontrar uma expansão da solução em termos de uma série de potências do parâmetro pequeno ε, $(0 < \varepsilon \ll 1)$ que é obtida através da expansão de Taylor, conforme [1, 2].

O problema de contorno é composto pela equação (1) e as condições $w(-\infty) = 1$, $w(0) = 1/2$ e $w(+\infty) = 0$ e, $\varepsilon = 1/c^2 \leq 0,25$. Introduzindo novas variáveis, pode-se rescrever a equação diferencial (1) em: $varepsilon g''(s) + g'(s) + g(s)(1 - g(s)) = 0$. Dessa forma, as condições do problema original transladam-se para: $g(-\infty) = 1$, $g(0) = 1/2$ e $g(+\infty) = 0$, o que permite encontrar uma solução aproximada dessa equação assumindo uma série de perturbações dada por: $g(s) = g_0(s) + \varepsilon g_1(s) + \varepsilon^2 g_2(s) + ...$

Para obter os termos $g_0(s)$, $g_1(s)$, $g_2(s)$, ..., substitui-se a solução assintótica na equação diferencial que está em função do argumento s e encontrando uma sequência recorrente, que permite obter a solução do problema homogeneizado, e consequentemente a solução analítica aproximada da equação de Fisher-Kolmogorov dada por:

$$W(z) = \frac{1}{1 + e^{\frac{z}{c}}} + \frac{e^{\frac{z}{c}}}{c^2 \left(1 + e^{\frac{z}{c}}\right)^2} ln \left(\frac{4e^{\frac{z}{c}}}{\left(1 + e^{\frac{z}{c}}\right)^2} \right) + O\left(\frac{1}{c^2}\right). \tag{3}$$

Conclui-se que as soluções encontradas através dos métodos analíticos, exato e aproximado, são semelhantes e descrevem de maneira satisfatória o modelo estudado.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece a CAPES pelo apoio financeiro na realização desse trabalho.

Referências

[1] E. J. Hinch.*Perturbation Methods.* Cambridge University Press, Cambrigty, UK, 1992.

[2] J. D. Logan *An Introduction to nonlinear partial differential equations.* Wiley-Interscience, 2008.