Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma aplicação de Geometria Projetiva no Ensino Básico

Olga Harumi Saito[1]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR
Elvis Schmidt[2]
Docente das Engenharias, FAMEG-UNIASSELVI, Guaramirim, SC

Resumo. Apresentamos neste trabalho um exemplo da aplicação do Princípio Fundamental da Geometria Projetiva nas séries iniciais do Ensino Básico através da projeção cônica e da perspectiva envolvida. A Geometria Projetiva, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), é uma possibilidade que pode ser empregada em conteúdos como medidas de comprimento, de volume, distância e ângulos além do desenvolvimento de atividades em parceria com outras disciplinas como, por exemplo, Artes.

Palavras-chave. Ensino de Geometria, Perspectiva, Projeção cônica, Teorema Fundamental da Geometria Projetiva.

1 Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) - 1ª a 4ª Série [3] afirmam que o espaço geométrico conhecido pela criança é o espaço perceptivo, ou seja, aquilo que é visto e percebido, mas é justamente nesta área que se encontram as dificuldades. Tais barreiras na compreensão de espaço e forma se estende até o Ensino Médio quando a representação dos objetos não são realizados com a noção de profundidade, dificultando a interpretação e a resolução de problemas.

Mas não seria papel da disciplina de Artes? E o papel da Matemática reduzir-se às medidas e às formas?

A Geometria Projetiva pode preencher algumas dessas lacunas contribuindo, de forma significativa, na formação dos estudantes. E a sua inclusão na Educação Básica apóia-se nas Diretrizes Curriculares de Educação Básica: Matemática do Estado do Paraná (DCEBs-PR) [8] que inclui o tema Geometrias não-Euclidianas no currículo da disciplina de Matemática, uma quebra de paradigmas diante da multiplicade de sistemas matemáticos possíveis [3], isto para citar uma das referências.

[1]harumi@utfpr.edu.br
[2]elvisschmidt@hotmail.com

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

2 Geometria Projetiva

Na Idade Média, as pinturas não representavam a realidade como ela é vista, não apresentavam a noção de profundidade e baseavam-se em temas e símbolos religiosos, como podemos perceber na Figura 1 (a), onde a *Santa Ceia* é retratada de forma plana. Com o desenvolvimento da Geometria Projetiva durante o Renascimento, os artistas passaram a representar com maior fidelidade possível os objetos captados pela visão humana, como pode ser observado na Figura 1 (b), obra de Leonardo da Vinci [1].

(a) (b)

Figura 1: (a) *Santa Ceia* da Taula de Sant Miquel [4]; (b) *A Última Ceia* de Leonardo da Vinci [7].

Na Educação Básica, espera-se que os estudantes consigam representar os objetos e cenas tridimensionais no plano e, para isto, o sistema de projeção cônica e a perspectiva cônica são adotadas [5]. Estes baseiam-se em alguns elementos, como:

- Quadro: espaço que delimita o objeto ou a paisagem representada (moldura do desenho);
- Observador: quem determina a posição dos demais elementos;
- Linha de Terra (LT): é uma linha horizontal determinada pelos pés do observador, é a base do desenho;
- Linha do Horizonte (LH): determinada pelo olhar do observador;
- Ponto de Vista (PV): linha vertical determinada pela direção do observador;
- Ponto de Fuga (PF): intersecção entre a linha do horizonte com o ponto de vista para onde as linhas paralelas convergem, podendo ser mais de um;
- Linhas de Fuga (LF): linhas imaginárias que se afunilam em direção ao ponto de fuga.

Na Figura 2 é possível visualizar esses elementos básicos.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0450

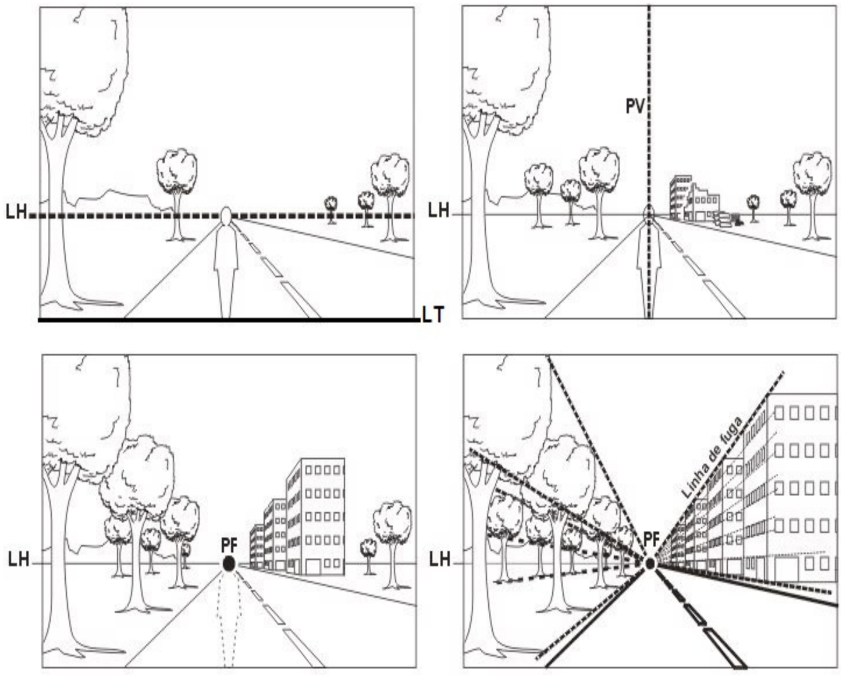

Figura 2: Elementos de perspectiva [6].

2.1 O Teorema Fundamental da Geometria Projetiva

Estabelecidas as definições de perspectividade e projetividade, o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva constitui um importante resultado que estabelece o que é necessário para que uma projetividade possa ser bem definida, ou seja, aquilo que garante que uma projetividade entre duas fileiras de pontos seja única.

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental da Geometria Projetiva)**.** *Uma projetividade é determinada quando são conhecidos três pontos colineares e seus três pontos colineares correspondentes.*

Inicialmente é necessário verificar a existência de uma projetividade entre duas fileiras de três pontos, conforme a construção da Figura 3 (a). Sejam uma fileira de pontos A, B e C sobre a reta r e um fileira de pontos A', B' e C' sobre a reta s. A reta l é construída passando por A e A'. Sejam ainda: o ponto P, pertencente a l, diferente de A e A'; a reta m passando por P e B; a reta n passando por P e C; por A' a reta t diferente de l e s; o ponto $B_1 = t \cap m$; o ponto $C_1 = t \cap n$; o ponto $Q = B_1B' \cap C_1\ C'$.

Quando um feixe de retas é cortado por duas fileiras de pontos, ocorre a perspectividade representada por $\overset{=}{\wedge}$, então, $ABC \overset{=}{\wedge}_P A'B_1C_1 \overset{=}{\wedge}_Q A'B'C' \Rightarrow ABC \overline{\wedge}\, A'B'C'$, ou seja, a fileira ABC é perspectiva à fileira $A'B_1C_1$ pelo ponto P que, por sua vez, é perspectiva à fileira $A'B'C'$ pelo ponto Q e, como o produto de duas perspectividades consecutivas estabelece uma projetividade, concluimos que a fileira ABC é uma projeção da fileira $A'B'C'$ e vice-versa. Uma vez verificada a existência da projetividade entre duas fileiras de três pontos, é necessário provar que esta projetividade está bem definida para quaisquer pontos sobre os feixes dados, ou seja, que não exista outra projetividade entre os feixes que eventualmente resulte em pontos diferentes dos mesmos.

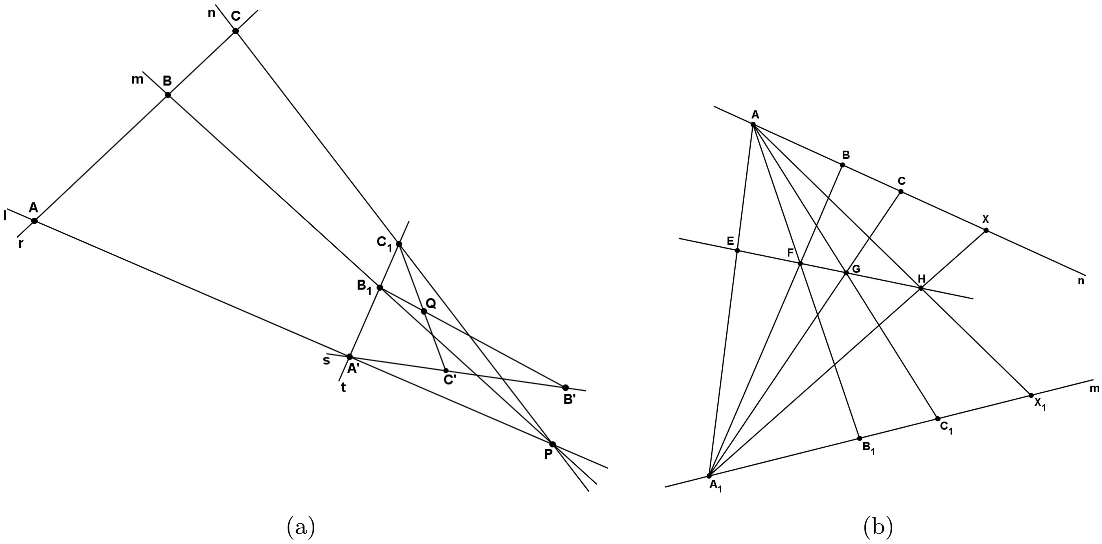

Figura 3: Projetividade: (a) composta por duas perspectividades; (b) entre fileiras de 4 pontos.

A prova da unicidade do Teorema 2.1 utiliza um axioma adicional da Geometria Projetiva. Este axioma é descrito por Auffinger e Valentim [2].

Axioma 2.2. *Se uma projetividade deixa invariante cada um dos três pontos distintos de uma reta, ela deixa invariante todos os pontos da reta.*

Prova da unicidade

Sejam uma fileira de pontos A, B, C e X sobre a reta n e outra fileira A_1, B_1 e C_1 sobre a reta m. Uma das maneiras de construir um ponto X_1 pertencente à m tal que $ABCX$ é uma projeção de $A_1B_1C_1X_1$, $ABCX \;\overline{\wedge}\; A_1B_1C_1X_1$, é apresentada na Figura 3 (b). Nesta construção geométrica, a fileira $ABCX$ é perspectiva à fileira $EFGH$ pelo ponto A_1 e esta última é perspectiva à fileira $A_1B_1C_1X_1$ pelo ponto A, concluimos então que $ABCX$ é uma projeção de $A_1B_1C_1X_1$.

De forma resumida, obtém-se a seguinte cadeia de perspectividades:

$$ABCX \overset{=}{\wedge}_{A_1} EFGH \overset{=}{\wedge}_{A} A_1B_1C_1X_1. \quad (1)$$

É importante salientar que a sequência de perspectividades apresentada é possível desde que as retas n e m não sejam coincidentes. Supondo, entretanto, que as retas n e m sejam coincidentes, nesse caso uma perspectividade qualquer pode ser utilizada para levar a fileira $ABCX$ para fora de n e é possível construir a seguinte cadeia de perspectividades:

$$ABCX \overset{=}{\wedge}_{O} A_2B_2C_2X_2 \overset{=}{\wedge}_{A_1} EFGH \overset{=}{\wedge}_{A_2} A_1B_1C_1X_1. \quad (2)$$

Supondo, então, que o ponto X_1 de (1) é diferente do ponto X_1 de (2), ou seja, se o ponto X_1 não for único, existe um ponto X_3 diferente de X_1 tal que (1) e (2) resultam, respectivamente, em:

$$ABCX \barwedge A_1B_1C_1X_1 \text{ e } ABCX \barwedge A_1B_1C_1X_3.$$

Assim, seguindo o caminho inverso da cadeia de perspectividades (1) e em seguida o caminho estabelecido pela cadeia (2), concluimos que $A_1B_1C_1X_1 \barwedge A_1B_1C_1X_3$, o que contraria o Axioma 2.2. Portanto, não existe tal ponto X_3 e a unicidade do Teorema 2.1 está provada.

3 Oficina de Geometria Projetiva Aplicada

Uma Oficina de atividades envolvendo noções básicas de Geometria Projetiva foi realizada com os estudantes do 6º ano de uma Escola Municipal de Ensino Fundamental de Jaraguá do Sul, Santa Catarina por Schmidt [9] em 2014, após verificar o conhecimento dos estudantes em relação a esse assunto.

Schmidt [9] iniciou as atividades com a visualização de um objeto que integra o vocabulário comum das aulas de Matemática: o cubo. Posteriormente os estudantes foram observar um dos corredores da escola, Figura 4.

Figura 4: Corredor da escola utilizado na atividade da oficina.

Da observação do corredor da escola, os estudantes partiram para a representação com os conhecimentos que possuíam até o momento. Após esta atividade, os mesmos foram levados a conhecer alguns conceitos da Geometria Projetiva.

De posse dos conceitos, refizeram os seus desenhos do corredor da escola que foram comparados com os desenhos anteriores, analisando o progresso apresentado.

Esta atividade motivou bastante os estudantes. Vários deles pesquisaram na internet sobre o conteúdo, promovendo uma interação entre os estudantes e entre os estudantes e o autor da oficina.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0450

A evolução dos trabalhos pode ser observada na Figura 5: a Figura 5 (a), que apresenta um desenho puramente planificado e, o estudante justifica, ao ser questionado sobre o seu desenho, que a visão foi obtida “imaginando que estava em cima, no teto”; já na Figura 5 (b), o mesmo estudante produziu o desenho a partir das técnicas de perpsectiva estudadas.

(a) (b)

Figura 5: Desenho do corredor da escola: (a) antes da aula sobre noções de Geometria Projetiva e perspectiva; (b) após a aula [9].

Podemos observar que foi determinada a linha de horizonte e o ponto de vista e, na intersecção destes dois elementos, posicionou-se o ponto de fuga, traçando as linhas de fuga, como na Figura 6. Ainda, é interessante observar que as luminárias do teto e do corredor também foram desenhadas em perspectiva, ou seja, as mais próximas do observador são maiores e as mais distantes, menores.

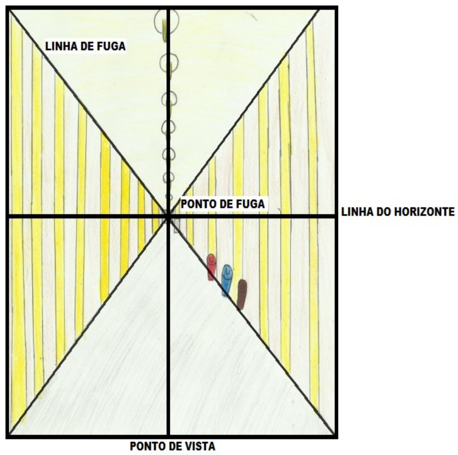

Figura 6: Desenho do corredor com elementos de perspectiva.

4 Conclusões

A aplicação de conceitos básicos de Geometria Projetiva nas séries iniciais da Educação Básica, como ponto de fuga, permite produzir efeitos de tridimensionalidade e uma visualização mais próxima da realidade do objeto de estudo. As atividades realizadas na Oficina possibilitaram a apresentação destes conceitos permitindo que os estudantes estruturassem previamente os seus desenhos e apresentassem excelente progresso e envolvimento ao longo das atividades.

Agradecimentos

À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

Referências

[1] F. R. T. de Almeira, Notas para as aulas de Geometria Projetiva e Desenho. Notas de Aulas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

[2] A. C. T. de C. Auffinger and F. J. da S. Valentim, Introdução à geometria projetiva, 2003, UFES, 5a. edição, 2003.

[3] Brasil. Parâmetros curriculares nacionais: 1ª a 4ª séries, MEC/SEF, Brasília, Volume 3, 1997.

[4] R. Costa e C. Brianchi, A Taula de Sant Miquel (séc. XIII) do mestre de Soriguerola (Baixa Cerdanha - Catalunha). http://www.ricardocosta.com/artigo/taula-de-sant-miquel-sec-xiii-do-mestre-de-soriguerola-baixa-cerdanha-catalunha. Acesso em 14 março de 2017.

[5] R. Courant and H. Robbins, *O que é matemática?*, Moderna, Rio de Janeiro, 2000

[6] A. Juvenil, Estudo de Desenho. http://www.sobrearte.com.br/. Acesso em 14 de março de 2017.

[7] L. C. Oleques, A última ceia. http://www.infoescola.com/pintura/a-ultima-ceia/. Acesso em 14 de março de 2017.

[8] Paraná, Diretrizes curriculares da educação básica: matemática. SEED/PR, Curitiba, 2008.

[9] E. Schmidt, O ensino de Geometria Projetiva na Educação Básica: uma proposta para apreensão do conhecimento do mundo tridimensional. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, PR, 2015.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0450