Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicação da equação diferencial de Sylvester

Elmer Rolando Llanos Villarreal[1]
Centro de Ciências Exatas e Naturais, UFERSA, Mossoró, RN.
Maxwell Cavalcante Jácome, [2]
Engenharia Mecânica, UFERSA, Mossoró, RN.
Edpo Rodrigues de Morais[3]
Programa de Pós-Graduação em Sistemas de Comunicação e Automação, UFERSA, Mossoró, RN.
João Victor de Queiroz [4]
Programa de Pós-Graduação em Sistemas de Comunicação e Automação, UFERSA, Mossoró, RN.
Walter Martins Rodrigues[5]
Centro de Ciências Exatas e Naturais, UFERSA, Mossoró, RN.

Resumo: *O presente artigo te por objetivo encontrar algoritmo de controle para rastreamento de sistemas dinâmicos não-lineares aplicados em VANT via realimentação de saídas. O algoritmo de controle tem um quadro interno para testar controlabilidade do sistema variando no tempo via transformada de Lyapunov. Calcular a matriz de realimentação de saídas, e apresenta-se uma aplicação de controle em VANT.*

Palavras chave. Realimentação de saídas, Equação de Sylvester, VANT.

1 Introdução

Este artigo apresenta um algoritmo de controle para rastreamento de sistemas dinâmicos não-lineares aplicados em VANT via realimentação de saídas . O problema de rastreamento leva a equações linearizadas de erro variando no tempo. Daí novas noções de autovalores são introduzidas para sistemas de variação linear do tempo, um esquema de posicionamento de autoestrutura é proposto para uma estrutura linear variando no tempo via uma equação diferencial Sylvester. Também é mostrado que sistemas de malha fechada podem ser estabilizada pelo posicionamento de autovalores apropriadas. O desempenho desejado poderia ser obtido atribuindo-se valores aos autovetores. O presente algoritmo de controle tem um quadro interno para testar controlabilidade do sistema variando no tempo via transformada de Lyapunov.

Controle por posicionamento de polos para uma planta variando no tempo foi proposta em [7]. Em [4] foi proposta um projeto de posicionamento de autoestrutura para sistemas lineares variando no tempo via a equação diferencial de Sylvester, que foi baseado numa proposta de posicionamento de autoestrutura em [9]. Em [5] desenvolveu um controle LTI para $VANTS$

O artigo é organizado a seguir. Na seção 2 formula-se o problema seguindo algumas pre-liminares em sistemas descritores. Na seção 3 temos os sistemas lineares invariantes

[1]elmerllanos@ufersa.edu.br
[2]maxwellc.jacome@hotmail.com
[3]edpo_morais@hotmail.com
[4]joao.queiroz@ufersa.edu.br
[5]walterm@ufersa.edu.br

no tempo. Na seção 4 temos os sistemas lineares variantes no tempo. Na seção 5 temos aplicação de controle em $VANT$. Na seção 6 temos os resultados e discussões. Finalmente, às conclusões finais na seção 7.

2 Sistema descritor

Seja um sistema descritor com variáveis de estado, x, controle u dado por um conjunto de N equações

$$E\dot{x}(t) = f(x,u). \tag{1}$$

Considere o sistema descritor invariante no tempo descrito por:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2}$$
$$y(t) = Cx(t), \tag{3}$$

onde: $x \in \mathcal{X} \sim \Re^n$ é variável de estado, $u \in \mathcal{U} \sim \Re^m$ é variável de controle (entrada variável), $y \in \mathcal{Y} \sim \Re^p$ é a variável de saída e $E \in \Re^{n\times n}$, $posto\,(E) = q < n$; como as outras matrizes com dimensões apropriadas, onde $posto\,(B) = m$ e $posto\,(C) = p$.

Assim, o problema de controle é encontrar uma lei controle por realimentação de saídas $u(t) = Ky(t)$, tal que o sistema em malha fechada

$$E\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t), \tag{4}$$

é S-estável: regular, assintoticamente estável e livre de impulsos em [1], [8].

3 Sistemas lineares invariantes no tempo

Considere a seguir o sistema quando a matriz E é uma matriz identidade $E = I_{n\times n}$ em [3], [2]. Assim seja um sistema dinâmico com variaveis de estado, x, controle u dado por um conjunto de N equações

$$\dot{x}(t) = f(x,u). \tag{5}$$

Considerando um sistema linearizado. Seja as equações a seguir:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{6}$$
$$y(t) = Cx(t). \tag{7}$$

Procura-se uma matriz de controle saída $K(t)$.

$$u(t) = K(t)y(t), \tag{8}$$

com o sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A + BK(t)C)x(t). \tag{9}$$

O problema fundamental é escolher os elementos de $K(t)$ de tal forma que o desempenho é satisfatório. Isto é muitas vezes realizado colocando os polos (autovalores) do sistema de malha fechada em locais específicos. Para isso colocamos o problema do autovalor:

$$(A + BK(t)C)\phi_i = \lambda_i\phi_i, \tag{10}$$

onde, ϕ_i é um autovalor à direita. Introduzimos um vetor parâmetro auxiliar

$$h_i = K(t)C\phi_i, \tag{11}$$

o que leva a

$$(A - \lambda_i I)\phi_i = -Bh_i. \tag{12}$$

A montagem de todas estas equações leva às equações de Sylvester em [2].

$$AV - VH_V = -BW. \tag{13}$$

4 Sistemas lineares variáveis no tempo

Contudo, no caso dos sistemas com variação temporal, tem havido uma investigação muito limitada, em parte devido à complexidade do problema.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t). \tag{14}$$

Procura-se uma matriz de controle variando no tempo $K(t)$.

$$u(t) = K(t)y(t), \tag{15}$$

com o sistema em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)K(t)C(t))x(t). \tag{16}$$

Agora, realizamos uma transformação de Lyapunov para converter as equações em forma canônica. O problema de transformar um sistema linear variando no tempo para uma forma canônica complementar como é considerado em [6]. Depois de converter $A(t)$ em forma canônica, obtemos uma matriz complementar. Agora definimos o problema correspondente ao autovalor para os sistemas da seguinte maneira:

$$(A_c(t) + \tilde{B}(t)\tilde{K}\tilde{C}(t))p_i(t) - \rho_i(t)p_i(t) = \dot{p}_i(t) \tag{17}$$
$$(A_c(t) + \tilde{B}(t)\tilde{K}\tilde{C}(t))q_i(t) - \rho_i(t)q_i^T(t) = -\dot{q}_i^T(t), \tag{18}$$

onde, $p_i(t)$ e $q_i(t)$ são os autovetores a esquerda e a direita respectivamente, correspondente ao autovalor $\rho_i(t)$.

O objetivo do presente artigo é encontrar a matriz de controle variando no tempo $K(t)$ de tal forma que os autovalores da malha fechada sejam posicionados de forma correta exatamente com seus os autovetores próprios desejados.

Se definimos um vetor parâmetro,

$$h_i(t) = \tilde{K}(t)\tilde{C}(t)p_i(t). \tag{19}$$

Então a forma de matriz da equação de Sylvester diferencial pode ser escrita como:

$$A_c(t)P(t) - P(t)U(t) + \tilde{B}(t)W(t) = \dot{P}(t), \tag{20}$$

onde,

$$P(t) = [p_1(t), p_2(t), ..., p_N(t)] \tag{21}$$
$$U(t) = diag[\rho_1(t), \rho_2(t), ..., \rho_N(t)] \tag{22}$$
$$W(t) = [w_1(t), w_2(t), ..., w_N(t)]. \tag{23}$$

Para uma matriz autovalores $U(t)$ que não gera um conjunto atrativo de autovalores em malha fechada, um conjunto de autovetores próprios desejados em malha fechada pode ser seleccionado como

$$P_d(t) = [p_{d1}, p_{d2}, ..., p_{dN}]. \tag{24}$$

Depois de escolhidos, calcula-se uma matriz auxiliar, $\tilde{H}(t)$.

$$\tilde{H}(t) = -B^{+}(t)[A_c(t)P_d(t) - P_d(t)U_d(t) - \dot{P}_d], \tag{25}$$

onde, B^{+} denota a matriz seudo-inversa. Ao substituir esta solução pela matriz $\tilde{H}(t)$ e resolvendo com ajuda da matriz de autovetor direita admissível, encontra-se $P_a(t) \neq P_d(t)$. A matriz resultante é o mais próximo possível e satisfaz exatamente a seguinte equação:

$$A_c(t)P_a(t) - P_a(t)U_d(t) + \tilde{B}\tilde{H} = -\dot{P}_a(t)]. \tag{26}$$

Na forma vectorial temos que:

$$\dot{\bar{P}}_a = (I \otimes A_c\bar{P}_a(t)) + (U_d(t) \otimes (-I))\bar{P}_a + \bar{D}(t), \tag{27}$$

onde, $\otimes$ representa o produto Kronecker. Finalmente, a matriz de ganho variável no tempo é dada por:

$$\tilde{K}(t) = \tilde{W}(t)P_a^{-1}. \tag{28}$$

Assim temos a lei de controle (para as equações transformadas)

$$\tilde{u}(t) = \tilde{K}(t)\tilde{y}(t). \tag{29}$$

Assim, calcula-se $\tilde{K}(t)$ para o sistema em malha fechada com uma resposta satisfatória.

5 Aplicação de controle em VANT

Esta seção apresenta uma aplicação do autovetor e um controle linear tempo-variando para as equações de erro do modelo rastreamento $VANT$. Um veículo aéreo tem seis graus de liberdade de corpo rígido comumente chamados de surge(u), sway(v), heave(w), roll(p), pitch (q) e yaw (r). O quadrotor $VANT$ move-se com seis graus de liberdade, mas apenas quatro deles são controlados por quatro variáveis de controle elevador total e três torques) diretamente para obter um sistema estável. As quatro variáveis de controle correspondem a quatro movimentos básicos: heave(w), roll(p), pitch(q) e yaw(r). O movimento pode ser definido em coordenadas corpo-fixas ou coordenadas terra-fixas, e as orientações angulares são definidas usando uma sequência de ângulos de Euler. Toda a questão dos modelos de aeronaves pode ser bastante complexa; assim para, determinar o modelo para usar o controle pode ser bastante complicado. Neste trabalho será realizado um estudo sobre um modelo dinâmico não-linear de 3 DOF para o veículo aéreo não tripulado $VANT$ seja considerado a seguir :

$$\dot{u} = rv + \frac{F_x}{m} \tag{30}$$

$$\dot{v} = -rv + \frac{F_y}{m} \tag{31}$$

$$\dot{r} = R_4 l + R_7 n \tag{32}$$

$$F_x = -\frac{1}{2\rho V^2 S C_{DO}} \tag{33}$$

$$F_y = \frac{1}{2\rho V^2 S (C_{Y\beta} tan^{-1}(\frac{v}{u}))} \tag{34}$$

$$l = \frac{1}{2\rho V^2 S (C_{l\beta} tan^{-1}(\frac{v}{u}) + \frac{C_{lr} br}{2V^2} + C_{l\delta_a}\delta_a)} \tag{35}$$

$$n = \frac{1}{2\rho V^2 S (C_{n\beta} tan^{-1}(\frac{v}{u}) + \frac{C_{nr} br}{2V^2} + C_{n\delta_a}\delta_a)} \tag{36}$$

onde,

$$R_4 = \frac{J_{xy}}{R} \tag{37}$$

$$R_7 = \frac{((J_x - J_y)J_x + J_{xz}^2)}{R} \tag{38}$$

$$R = J_x J_z - J_{xz}^2, \tag{39}$$

o modelo do quadrotor $VANT$ tem apenas $\delta_a(t)$ como o controle de entrada.

Definimos um vetor de estado

$$\dot{x} = [\dot{u}\ \dot{v}\ \dot{r}]^T \tag{40}$$

$$x = [u\ v\ r]^T. \tag{41}$$

Em seguida, especifica-se funções de tempo desejadas: $x_d(t)$ $\dot{x}_d(t)$ e uma função $\delta_{ad}(t)$ normalmente fixada.

$$\dot{x}_d = [\dot{u}_d \; \dot{v}_d \; \dot{r}_d]^T \tag{42}$$

$$x_d = [u_d \; v_d \; r_d]^T. \tag{43}$$

As equações de erro são:

$$\bar{x}(t) = \dot{x}_d - x(t). \tag{44}$$

Linearizando as equações acima, as equações de erro podem ser escritas como equações lineares variáveis no tempo como mostrado abaixo

$$\bar{x}(t) = A\bar{x} + B\bar{u}, \tag{45}$$

onde $x_d(t)$ é uma função da trajetória desejada, e $u(t)$ é o ângulo de airelon (entrada de controle). No algoritmo de controle descrito na seção anterior será aplicado às equações lineares de erro variando no tempo. Aplica-se o seguinte procedimento nas equações de erro acima.

- Tomar a transformação de Lyapunov para transformar um sistema linear variável no tempo na forma canônica complementar.Escolha do espectro $\lambda(t)$ em malha fechada desejada e a matriz modal desejada direita para o sistema transformado.
- Calcular a matriz de parâmetros $\tilde{W}(t)$. Resolver a equação diferencial de Sylvester com a matriz de parâmetros do passo acima para obter a matriz modal direita viável.
- Calcular a matriz de realimentação de saídas $\bar{K}(t)$. Como $\bar{K}(t)$ é obtido para o sistema transformado, tomamos a transformação de Lyapunov inversa para calcular a matriz de ganho de realimentação $K(t)$ para o sistema original.

6 Resultados e discussões

Primeiro, escolhe-se a trajetória de entrada desejada usando $\delta_a d(t) = Csen(t)$, onde C é um parâmetro constante. Escolhe-se para os autovalores e a matriz modal.

$$\delta_a d(t) = \begin{bmatrix} -e^{\alpha t} - s_1 & -e^{\alpha t} - s_2 & -e^{\alpha t} - s_3 \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$P_d(t) = \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Onde α, s_i e β_i são todos positivos e são parâmetros de entrada no projeto do controlador. O conjunto de equações para foram resolvidos em conjunto com as equações de erro linear em malha fechada numericamente. Isso considerando uma matriz realimentação de saída estável. Observe novamente que a própria matriz de ganho é uma função do tempo. É provável que diferentes escolhas dos autovalores e dos autovetores respectivamente resultem em diferentes graus de resposta. Os caminhos desejados são assumidos para a $VANT$ com base na aplicação que está realizando em uma situação particular.

7 Conclusões

Neste artigo, apresenta-se novas noções de autovalores para sistemas lineares, e desenvolveu uma estrutura de projeto de controle linear através de uma equação diferencial de Sylvester. Mostra-se que os sistemas em malha fechada poderiam ser estabilizados Através do posicionamento de autovetor apropriado, e um desempenho poderia ser obtido através da determinação do autovetores à direita. Com as especificações do projeto o exemplo de controle de vôo $VANT$ confirmou a utilidade e precisão do algoritmo de controle de rastreamento proposto. O algoritmo proposto é muito aplicável a sistemas de qualquer ordem de complexidade com qualquer grau ou tipo de não-linearidade.

Referências

[1] E. B. Castelan, E. R. Ll. Villarreal, and S. Tarbouriech, Quadratic Characterization and Use of Output Stabilizable Subspaces in Descriptor Systems, *Proceedings (CD) 1st IFAC Symposium on System Structure*, Prague, volume 1, pages 255-260, 2001.

[2] E. B. Castelan, J. C. Hennet, and E. R. Ll. Villarreal, Quadratic Characterization and Use of Output Stabilizable Subspaces, *IEEE Trans. Automatic. Control*, 48(4): 654–660, 2003.

[3] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, 1996.

[4] H. Lee, and J. Choi,Linear time-varying eigenstructure assigment with flight control application. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 40(1):145–157, 2004.

[5] C. Nataraj, and P. Kasliwal, Linear time varying control of unmanned surface vehicles. In *Intelligent Ships Symposium VI*, American Society of Naval Engineers, 2005.

[6] L. Silverman, Transformation of time-variable systems to canonical (phase-variable) form, *IEEE Transactions on Automatic Control* 11(2):300–303, 1966.

[7] K. Tsakalis, and P. Ioannou, *Linear Time-Varying Systems*, Engelwood Cliffs, NJ: Prentice -Hall, 1993.

[8] E. R. Ll. Villarreal, J. A. R. Vargas, and E. M. Hemerly, Static Ouput Feedback stabilization using Invariant Subspaces and Sylvester Equations, *TEMA - Tend. Mat. Apl. Comput.*, 10(1):99–110, 2009.

[9] J. Zhu, A unified spectral theory for linear time-varying systems-progress and challenges. In *Proceedings of the 34th IEEE conference on Decision and Control*, volume 1, pages 2540-2546, 1995.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0326