

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Investigação da Estabilidade em escoamento Bidimensional para o Fluido Oldroyd-B

Analice Costacurta Brandi¹

Ellen Silva Gervazoni²

Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNESP, Presidente Prudente, SP

Márcio Teixeira de Mendonça³

Divisão de Propulsão Aeronáutica, IAE, São José dos Campos, SP

Leandro Franco de Souza⁴

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos, SP

Resumo. Diversos escoamentos de interesse prático são de fluidos não-Newtonianos e uma classe destes fluidos é classificada como fluidos viscoelásticos. Muitas vezes é desejável saber se estes escoamentos propagam-se no estado laminar ou no turbulento. Para isto, utiliza-se a teoria de estabilidade linear (LST) para verificar a estabilidade dos escoamentos a perturbações não estacionárias de fluidos viscoelásticos. O modelo matemático adotado para o fluido não-Newtoniano do tensor extra-tensão é o Oldroyd-B. Neste trabalho, a teoria de estabilidade linear foi utilizada para investigar a convecção das ondas de Tollmien-Schlichting no escoamento de Poiseuille para o modelo de fluido Oldroyd-B. A fim de avaliar as curvas neutras de estabilidade, diferentes valores de parâmetros adimensionais são testados para os escoamentos de fluidos Newtoniano e não-Newtoniano. Os resultados numéricos obtidos são comparados com resultados da literatura.

Palavras-chave. Mecânica dos Fluidos, Teoria de Estabilidade Linear, Fluido Oldroyd-B, Equação de Orr-Sommerfeld.

1 Introdução

Há muitas aplicações científicas e industriais em que a estabilidade do escoamento laminar e a transição para a turbulência são relevantes. Sendo assim, é importante investigar a física da estabilidade e a transição laminar-turbulenta a fim de controlá-la, adiantá-la ou previni-la. Entre os diversos problemas surgidos nessa área está o tratamento de escoamentos de fluidos não-Newtonianos. Esse tipo de problema tem se tornado um grande desafio nessa área pois a maioria das aplicações industriais envolvem escoamentos de fluidos viscoelásticos, tais como, injeção de plásticos, processos de extrusão de forma geral e extração de petróleo.

¹analice@fct.unesp.br

²ellengerva@gmail.com

³marciomtm@iae.cta.br

⁴lefraso@icmc.usp.br

Desse modo, existe um grande interesse em desenvolver métodos numéricos capazes de simular escoamentos de fluidos viscoelásticos para poder prever, a custos baixos e com bons resultados, o comportamento do escoamento de um fluido durante o processo industrial. A equação de Orr-Sommerfeld é uma equação diferencial fundamental para as perturbações (equação da estabilidade) que forma o ponto de partida para a teoria da estabilidade de escoamentos laminares [1].

A teoria de estabilidade hidrodinâmica investiga como essas perturbações são amplificadas ou amortecidas e como a evolução dessas perturbações estão relacionadas ao fenômeno de transição para o escoamento turbulento [4]. O desequilíbrio entre as forças de inércia e o campo de pressões pode levar a instabilidade se não houver efeitos viscosos dissipativos. Porém, a viscosidade também tem um efeito desestabilizador devido à difusão de quantidade de movimento.

Nesse contexto, este trabalho apresenta a análise de estabilidade linear, através da convecção de ondas de Tollmien-Schlichting, do escoamento de Poiseuille para o fluido Oldroyd-B. Para isso, será utilizada a teoria de estabilidade linear para analisar a estabilidade de escoamentos de fluidos viscoelásticos e comparar com a de fluidos Newtonianos, a fim de contribuir para uma melhor escolha dos parâmetros destes escoamentos.

2 Formulação Matemática

Considerando um escoamento incompressível, isotérmico e não-Newtoniano, as equações governantes são dadas pelas equações de continuidade e de Navier-Stokes, respectivamente,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (2)$$

em que \mathbf{u} representa o campo de velocidade, t é o tempo, p é a pressão, ρ é a densidade do fluido e \mathbf{T} é o tensor extra-tensão. Neste trabalho, estudou-se escoamento viscoelástico em que a equação constitutiva utilizada é a do modelo Oldroyd-B dada por

$$\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\eta_p \mathbf{D}, \quad (3)$$

em que $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ é o tensor taxa de deformação, η_p é um coeficiente de viscosidade polimérica, λ refere-se ao tempo de relaxação do fluido e $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ é a derivada convectada definida como

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T}. \quad (4)$$

Considerando um escoamento bidimensional, o conjunto de equações (1)–(3) foi adimensionalizado utilizando os seguintes parâmetros:

$$\mathbf{x}^* = \frac{x}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\rho_0 U^2}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2},$$

onde L e U denotam escala de comprimento e velocidade, respectivamente. Essas equações podem então ser escritas (omitindo o símbolo $*$ por conveniência) como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}, \tag{7}$$

$$T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{8}$$

$$T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \tag{9}$$

$$T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{10}$$

em que os parâmetros adimensionais $Re = \frac{\rho UL}{\eta_0}$ e $Wi = \frac{\lambda U}{L}$ são associados aos números de Reynolds e Weissenberg, respectivamente. A quantidade de solvente Newtoniano é controlada através do coeficiente de viscosidade do solvente adimensional $\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}$, onde $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$ indica a viscosidade total do cisalhamento, e η_s e η_p representam as viscosidades do solvente Newtoniano e polimérico, respectivamente.

No problema do escoamento de Poiseuille viscoelástico o fluido está confinado dentro de um canal com paredes planas em $y = -1$ e $y = 1$. Para o modelo Oldroyd-B, a velocidade do escoamento base coincide com a solução parabólica de Poiseuille, ou seja, $U = 1 - y^2$ e assume que todas as variáveis dependem apenas de y , a coordenada transversal do canal, exceto para a pressão cujo gradiente é constante na direção x . O componente da velocidade transversal do canal v é identicamente nulo. As condições de contorno são adotadas no-slip nas paredes do canal.

3 Teoria de Estabilidade Linear

A teoria de estabilidade linear analisa o comportamento de um dado escoamento a perturbações de amplitude infinitesimal, como é apresentada para o escoamento de Poiseuille para o fluido Oldroyd-B. Esta teoria é baseada nas equações da continuidade e de Navier-Stokes, adotando algumas hipóteses sobre o escoamento e a forma de propagação das perturbações.

No caso bidimensional, o escoamento principal é tomado como permanente, tendo u e v como componentes cartesianos da velocidade, p como a pressão e T o tensor não-Newtoniano. Os componentes da perturbação são muito pequenos em relação ao escoamento principal e, em um regime transiente, são representados por \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{p} e \tilde{T} . Para análise no presente estudo toma-se um escoamento base invariante na direção x e que o

escoamento instantâneo pode ser decomposto em uma parte média e uma pequena perturbação. Portanto as variáveis podem ser compostas da seguinte forma, onde $(\tilde{\cdot})$ indica o escoamento perturbado

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, t), & v(x, y, t) &= \tilde{v}(x, y, t), \\ p(x, y, t) &= P(y) + \tilde{p}(x, y, t), & T(x, y, t) &= \mathbf{T}(y) + \tilde{T}(x, y, t). \end{aligned} \quad (11)$$

As composições das variáveis dadas na equação (11) são substituídas nas equações (5)–(10). Então, subtraindo as equações que descrevem o escoamento base, obtém-se as equações para as perturbações. As condições de contorno adotadas para o problema do escoamento de Poiseuille são no-slip nas paredes e decaimento das perturbações longe das paredes. Uma vez que as equações resultantes são lineares e que os coeficientes das equações não dependem de t e x , as soluções podem ser buscadas através do método de separação de variáveis, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, t) &= \bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}, & \tilde{v}(x, y, t) &= \bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}, \\ \tilde{p}(x, y, t) &= \bar{p}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}, & \tilde{T}(x, y, t) &= \bar{T}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}, \end{aligned} \quad (12)$$

em que (\cdot) representa a amplitude das perturbações, $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ é o número de onda na direção x e a taxa de crescimento espacial, $\omega = \omega_r + i\omega_i$ é a frequência angular e a taxa de crescimento temporal, onde $\lambda = 2\pi/\alpha$ é o comprimento de onda.

Substituindo as combinações lineares (12) nas equações de conservação para perturbação e reescrevendo de forma simplificada obtém-se a equação de Orr-Sommerfeld modificada para o fluido Oldroyd-B [2]

$$\begin{aligned} &\alpha(U - c)(\bar{v}'' - \alpha^2\bar{v}) - \alpha\bar{v}U'' + i\alpha^2(\bar{T}'^{xx} - \bar{T}'^{yy}) + \alpha(\bar{T}''^{xy} + \\ &+ \alpha^2\bar{T}^{xy}) = \frac{i\beta}{Re} [\bar{v}^{IV} - 2\alpha^2\bar{v}'' + \alpha^4\bar{v}]. \end{aligned} \quad (13)$$

A solução da equação de Orr-Sommerfeld corresponde a um problema de autovalor, cuja solução existe para alguns valores dos parâmetros α , ω e Re , e depende do perfil de velocidade do escoamento base em questão. As perturbações analisadas são não estacionárias e propagam-se como ondas de Tollmien-Schlichting [5].

Note que quando ω é um número real e α um número complexo, a amplitude da perturbação cresce na direção do escoamento médio x e a formulação é denominada formulação espacial. As componentes ω_r , α_r e α_i , representam, respectivamente, a frequência, o número de onda e a taxa de amplificação espacial. Quando α é um número real e ω um número complexo, a amplitude cresce no tempo e a formulação é denominada formulação temporal. Neste caso, ω_i é a taxa de amplificação temporal.

Um processo computacional implementado por Mendonça [3], adotando um *Shooting method*, é utilizado para resolver a equação de Orr-Sommerfeld.

4 Resultados Numéricos

Nesta seção é apresentada a análise de estabilidade do escoamento bidimensional de Poiseuille para um fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B. Os resultados numéricos da

teoria de estabilidade linear são apresentados para a análise de estabilidade temporal e espacial. Quando avalia-se as curvas neutras de estabilidade, foca-se somente nas perturbações bidimensionais e compara-se os resultados de fluido Newtoniano com fluido Oldroyd-B para diferentes valores de parâmetros adimensionais.

5 Análise temporal

Aqui são apresentados resultados de análise temporal, portanto considera-se o α real e o ω complexo. Para verificação do código de teoria de estabilidade linear foram analisados resultados para diversos valores de Weissenberg, mantendo-se fixa a constante que controla a contribuição do solvente newtoniano no fluido – $\beta = 0.9$. Estes estudos também foram realizados por Zhang et al. [6]. A Figura 1 mostra os valores obtidos para o número de Reynolds crítico para diferentes valores de Weissenberg. Reynolds crítico se refere ao menor valor de Reynolds onde o escoamento ainda é estável a perturbações não estacionárias. Pode-se observar uma boa concordância entre os resultados. Observa-se ainda que aumentando o Weissenberg de 0 a 3 o valor de Reynolds crítico diminui. À partir de Weissenberg igual a 3, observa-se que o valor de Reynolds crítico aumenta, mostrando que o escoamento pode se tornar mais estável a perturbações não estacionárias do que o escoamento newtoniano para números de Weissenberg maiores do que 7.

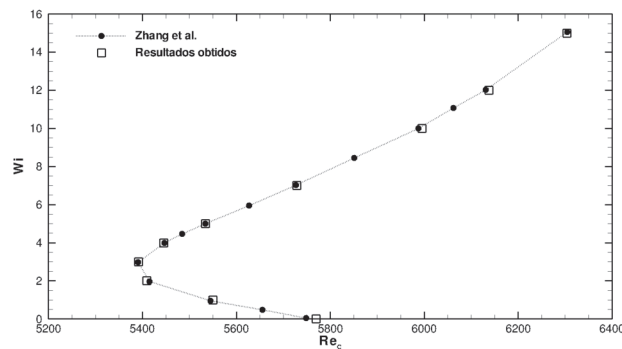


Figura 1: Valores de Reynolds crítico para diferentes valores de Weissenberg – Wi . Constante fixa $\beta = 0.9$.

E, também foram realizadas simulações para encontrar os valores de ω_i para diversos valores de Reynolds e α . Para cada simulação é possível determinar a curva neutra, ou seja, onde os valores de $\omega_i = 0$. Esta curva tem um formato característico de “banana”, as taxas de amplificação menores do que zero $\omega_i < 0$ estão do lado de fora da banana e as taxas de amplificação maiores do que zero $\omega_i > 0$ estão no interior da mesma. A Figura 2(a) apresenta curvas neutras para 3 diferentes valores da constante β , mantendo-se fixo o Weissenberg $Wi = 10.0$. Na mesma figura é apresentada a curva neutra para o fluido newtoniano. Pode-se observar que o comportamento do escoamento não é monotônico com a variação de β . Observa-se que o escoamento com $\beta = 0.9$ apresenta uma região estável maior do que a obtida para o escoamento newtoniano. Porém diminuindo-se mais o valor de β a região instável tende a crescer.

Para verificar a influência do número de Weissenberg na estabilidade do escoamento foram realizadas análises através da LST mantendo-se fixa a constante $\beta = 0.9$. As curvas neutras foram obtidas e estão apresentadas na Figura 2(b). A mesma observação realizada na comparação feita na Figura 1 pode ser feita aqui. Pode-se observar que o valor de Reynolds crítico diminui com o aumento do Weissenberg até o valor igual a 3. À partir deste valor o Reynolds crítico diminui, até se tornar menor do que o encontrado para $Wi = 0$ para valores de $Wi > 7$.

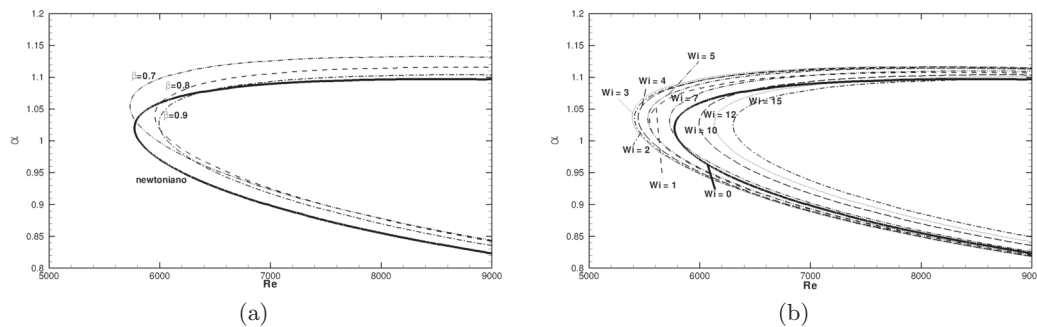


Figura 2: Análise temporal: comparação de curvas neutras para diferentes valores de β e Weissenberg Wi : a) Número de Weissenberg fixo – $Wi = 10.0$ e b) Constante fixa $\beta = 0.9$.

6 Análise espacial

Os resultados da análise espacial através da LST são apresentados nesta subseção. Neste caso considera-se o ω real e o α complexo. Realizou-se simulações para encontrar os valores de α_i para diversos valores de Reynolds e frequência ω_i . Para cada simulação é possível determinar a curva neutra, ou seja, onde os valores de $\alpha_i = 0$. Esta curva também apresenta o formato característico de “banana” e as taxas de amplificação maiores do que zero $\alpha_i > 0$, ou seja, região estável, estão do lado de fora da banana e as taxas de amplificação menores do que zero $\alpha_i < 0$ (região instável) estão no interior da mesma. A Figura 3(a) apresenta curvas neutras para 5 diferentes valores da constante β , mantendo-se fixo o Weissenberg – $Wi = 10.0$. A curva neutra para o fluido newtoniano também é apresentada na mesma figura. No caso da análise espacial pode-se observar também que o comportamento do escoamento não é monotônico com a variação de β . Observa-se que o escoamento com valores de $\beta = 0.9$ e 0.8 apresenta uma região estável maior do que a obtida para o escoamento newtoniano. Porém diminuindo-se mais o valor de β a região instável tende a crescer tornando-se bem mais instável do que o escoamento de fluido newtoniano.

Na análise espacial também foi verificada a influência do número de Weissenberg na estabilidade do escoamento através da LST. Nestes casos manteve-se fixa a constante $\beta = 0.9$. A Figura 3(b) apresenta os resultados obtidos para as curvas neutras. Pode-se observar que o valor de Reynolds crítico diminui com o aumento do Weissenberg até o valor igual a 2.5. À partir deste valor o Reynolds crítico diminui, até se tornar igual ao obtido para $Wi = 0$ em $Wi = 7.5$. Para valores de Weissenberg maiores do que 7.5 observa-se que

o escoamento apresenta uma região estável maior, com tendência a aumentar esta região quanto maior for o Weissenberg.

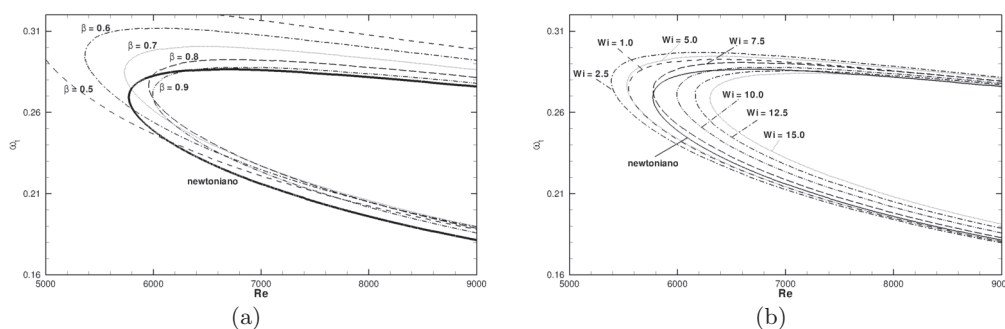


Figura 3: Análise espacial: comparação de curvas neutras para diferentes valores de β e Weissenberg Wi : a) Número de Weissenberg fixo – $Wi = 10.0$ e b) Constante fixa $\beta = 0.9$.

7 Conclusões

Neste trabalho a teoria de estabilidade linear foi utilizada para investigar a convecção das ondas de Tollmien-Schlichting no escoamento de Poiseuille para o modelo de fluido Oldroyd-B. A fim de avaliar as curvas neutras de estabilidade, diferentes valores de parâmetros adimensionais são testados para os escoamentos de fluidos Newtoniano e não-Newtoniano. Os resultados obtidos mostraram que os escoamentos tornaram-se mais instáveis a perturbações não-estacionárias à medida que β diminuiu, e também que a taxa de crescimento dos escoamentos diminuiu com o número de Weissenberg.

Referências

- [1] A. V. Boiko, A. V. Dovgal, G. R. Grek and V. V. Kozlov. *Physics of Transitional Shear Flows*, Springer, (2012).
- [2] E. S. Gervazoni. *Análise de estabilidade linear de escoamentos bidimensionais do fluido Oldroyd-B*, Dissertação de Mestrado, Unesp, 2016.
- [3] M. T. Mendonça e M. A. F. de Medeiros. *Instabilidade hidrodinâmica e transição para turbulência com aplicações em engenharia e meteorologia*. In *Anais the Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering (9th ENCIT)*, Caxambu, Minas Gerais, Brasil, 2002.
- [4] A. Palmer. *Linear Stability Analyses of Poiseuille Flows of Viscoelastic Liquids*. Tese de Doutorado, The University of Wales, 2007.
- [5] H. Schlichting. *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, New York, (1968).
- [6] M. Zhang, I. Lashgari, T. A. Zaki and L. Brandt. *Linear stability analysis of channel flow of viscoelastic Oldroyd-B and FENE-P Fluids*. *J. Fluid Mech.*, 737:249-279, 2013.