Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Análise Numérica dos Diferentes Processos da Multiplicação Intervalar

Alice F. Finger[1]
Campus Alegrete, Unipampa, Alegrete, RS
Programa de Pós-Graduação em Computação, CDTec, UFPel, Pelotas, RS
Aline B. Loreto[2]
Campus Cachoeira do Sul, UFSM, Cachoeira do Sul, RS
Dirceu A. Maraschin Jr.[3]
Programa de Pós-Graduação em Computação, CDTec, UFPel, Pelotas, RS
Lucas M. Tortelli[4]
Programa de Pós-Graduação em Computação, CDTec, UFPel, Pelotas, RS

Resumo. A matemática intervalar tem sido cada vez mais utilizada como uma alternativa para tratar problemas nos cálculos com números de ponto flutuante, uma vez que operar com esse tipo de dado pode levar a resultados com erros. O resultado é apenas uma aproximação de um valor real e erros gerados por arredondamentos ou por instabilidade dos algoritmos podem levar a resultados incorretos. A definição da aritmética intervalar mais conhecida e mais utilizada é a de Moore em 1966. Após, várias contribuições foram feitas quanto as operações intervalares, como por exemplo o cálculo da multiplicação intervalar com base na classificação em que os intervalos se encontram. Mais recentemente, uma nova aritmética intervalar foi desenvolvida, chamada aritmética intervalar multidimensional RDM. Com diferentes maneiras para a multiplicação intervalar, o objetivo do trabalho é comparar os três processos: multiplicação definida por Moore, multiplicação com base na classificação em regiões e a multiplicação definida na aritmética RDM, apresentar resultados numéricos quando aplicados em uma equação e realizar a análise numérica através das métricas de Erro Absoluto e diâmetro dos intervalos solução. Diante dos resultados é possível afirmar que a aritmética multidimensioal RDM retorna intervalos solução com mais qualidade.

Palavras-chave. Matemática Intervalar, RDM, Multiplicação Intervalar

1 Introdução

Os computadores empregam aritmética chamada de ponto flutuante ou ponto fixo. Nesta aritmética, números reais são aproximados por um subconjunto finito de números reais chamados números de máquina representáveis. Devido a esta representação são gerados erros. Tais erros podem ocorrer quando um valor real de entrada é aproximado

[1]alicefinger@unipampa.edu.br
[2]aline.loreto@ufsm.br
[3]dirceumaraschin@gmail.com
[4]lmtortelli@inf.ufpel.edu.br

por um número de máquina, quando resultados intermediários são gerados na execução de cada operação e vão se acumulando, ou ainda, um outro tipo de erro relacionado com a incerteza dos dados de entrada, o que acontece muito em casos de experimentos físicos e químicos onde os dados de entrada são incertos [8].

A análise intervalar surgiu com o objetivo inicial de controlar a propagação de erros numéricos em procedimentos computacionais. Ela traz uma garantia de resultado correto, uma vez que o valor real sempre está contido no intervalo solução. A realização das operações é feita por meio de números de ponto flutuante, isto é, os extremos do intervalo $\mathbf{x}$ são números de máquina $\underline{x}_{pf}$ e $\bar{x}_{pf}$ [3–5].

Entretanto, é preciso que o intervalo solução tenha qualidade. Para analisar a qualidade deste intervalo é preciso utilizar métricas como diâmetro, erro absoluto, erro relativo, entre outras.

Dentre as diversas maneiras de se calcular o produto entre intervalos, o objetivo do presente trabalho é apresentar as definições devidas a Moore, Vaccaro e Piegat e Landowski, mais utilizadas para essa operação e, através de uma aplicação, apresentar e discutir os resultados. Adicionalmente, realiza-se uma análise numérica para cada processo, podendo então verificar qual o melhor método a ser utilizado. A seguir são descritos os três diferentes processos adotados no presente trabalho: Moore, Vaccaro e RDM.

2 Diferentes Processos para Multiplicação Intervalar

Nesta seção serão apresentados os diferentes processos de multiplicação intervalar que serão adotados e analisados neste trabalho.

2.1 Multiplicação definida por Moore

Na aritmética intervalar desenvolvida por Moore [3] todas as operações aritméticas básicas estão definidas com o tipo intervalo, são elas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Pelas definições de Moore os cálculos com intervalos ocorrem sobre conjuntos, ou seja, quando se realiza uma operação de adição entre dois intervalos, por exemplo, o intervalo resultante é um novo conjunto contendo as adições de todos os pares de números das duas séries iniciais. Nessa aritmética, quando o método de extensão intervalar é aplicado, apenas os extremos do intervalo são considerados, isto é, somente os valores que representam os limites do intervalo são utilizados nos cálculos.

Abaixo encontra-se a operação de multiplicação definida por Moore, a qual será utilizada neste trabalho. As demais operações aritméticas básicas podem ser facilmente encontradas na literatura.

$$x \times y = [min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}]. \quad (1)$$

Caso os dois intervalos sejam positivos, a multiplicação pode ser feita da seguinte maneira:

$$x \times y = [\underline{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}]. \tag{2}$$

Uma das primeiras partições de $\mathbb{IR}$ conhecidas é a sugerida por Moore [3], a qual baseia-se nos sinais dos extremos dos intervalos: $++$, $-+$ e $--$. Esta partição permitiu-lhe definir expressões otimizadas para o cálculo da multiplicação de intervalos, sendo que apenas um de nove casos apresentados necessita de mais de dois produtos de reais para ser obtido [3]. Sejam A $= [\underline{x}, \bar{x}]$ e B $= [\underline{y}, \bar{y}]$:

- $\underline{x} \geq 0$ e $\underline{y} \geq 0 \Rightarrow A \times B = [\underline{x} \times \underline{y}, \bar{x} \times \bar{y}]$
- $\underline{x} \geq 0$ e $\underline{y} < 0 \leq \bar{y} \Rightarrow A \times B = [\bar{x} \times \underline{y}, \bar{x} \times \bar{y}]$
- $\underline{x} \geq 0$ e $\bar{y} < 0 \Rightarrow A \times B = [\bar{x} \times \underline{y}, \underline{x} \times \bar{y}]$
- $\underline{x} < 0 \leq \bar{x}$ e $\underline{y} \geq 0 \Rightarrow A \times B = [\underline{x} \times \bar{y}, \bar{x} \times \bar{y}]$
- $\underline{x} < 0 \leq \bar{x}$ e $\underline{y} \leq 0 \leq \bar{y} \Rightarrow A \times B = [min\{\underline{x} \times \bar{y}, \bar{x} \times \underline{y}\}, max\{\underline{x} \times \underline{y}, \bar{x} \times \bar{y}\}]$
- $\underline{x} < 0 \leq \bar{x}$ e $\bar{y} < 0 \Rightarrow A \times B = [\bar{x} \times \underline{y}, \underline{x} \times \underline{y}]$
- $\bar{x} < 0$ e $\underline{y} \geq 0 \Rightarrow A \times B = [\underline{x} \times \bar{y}, \bar{x} \times \underline{y}]$
- $\bar{x} < 0$ e $\underline{y} < 0 \leq \bar{y} \Rightarrow A \times B = [\underline{x} \times \bar{y}, \underline{x} \times \underline{y}]$
- $\bar{x} < 0$ e $\bar{y} < 0 \Rightarrow A \times B = [\bar{x} \times \bar{y}, \underline{x} \times \underline{y}]$

Para fins de implementação em computadores, pode-se minimizar os cálculos feitos no caso da multiplicação, considerando-se os sinais dos extremos dos intervalos, os quais levam aos nove casos apresentados acima.

2.2 Cobertura de intervalos reais na multiplicação segundo Vaccaro

Abaixo apresenta-se a definição de cobertura de intervalos com separação de fronteiras proposta por Vaccaro [9] e que será utilizada na comparação de resultados ao final do trabalho.

Definição 2.1. *(Cobertura de $\mathbb{IR}$ com Separação de Fronteiras): seja $[x] \in \mathbb{IR}$. Então $[x]$ pertence a somente uma das oito regiões, denominadas O, I, BI, II, BII, III, BIII e IV, conforme especificado a seguir:*

$$\left\{\begin{array}{cc} [x] \in O, & \underline{x} = \bar{x} = 0 \\ [x] \in I, & 0 < \underline{x} \leq \bar{x} \\ [x] \in BI, & 0 = \underline{x} < \bar{x} \\ [x] \in II, & (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| < \bar{x}) \\ [x] \in BII, & (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| = \bar{x}) \\ [x] \in III, & (\underline{x} < 0 < \bar{x}) \wedge (|\underline{x}| > \bar{x}) \\ [x] \in BIII, & \underline{x} < \bar{x} = 0 \\ [x] \in IV, & \underline{x} \leq \bar{x} < 0 \end{array}\right. \quad ou \quad \left\{\begin{array}{cc} [x] \in O, & \underline{x} = \bar{x} = 0 \\ [x] \in I, & m([x]) > 0 \wedge \underline{x} > 0 \\ [x] \in BI, & m([x]) > 0 \wedge \underline{x} = 0 \\ [x] \in II, & m([x]) > 0 \wedge \underline{x} < 0 \\ [x] \in BII, & m([x]) = 0 \wedge \bar{x} > 0 \\ [x] \in III, & m([x]) < 0 \wedge \bar{x} > 0 \\ [x] \in BIII, & m([x]) < 0 \wedge \bar{x} = 0 \\ [x] \in IV, & m([x]) < 0 \wedge \bar{x} < 0 \end{array}\right.$$

Além disso, o autor mostra que partindo-se de um elemento da região I e seguindo até um elemento da região IV tem-se uma varredura de intervalos com relação ao volume de contribuição de seus componentes positivos e negativos e que é coerente com as coberturas anteriormente referidas. Logo, a seguinte nomenclatura é adotada:

Definição 2.2. *(Nomenclatura para a Cobertura de $\mathbb{IR}$ pela Contribuição de Sinais): seja [x] $\in \mathbb{IR}$. Então:*
$[x] \in O \Rightarrow [x]$ *é dito nulo;*
$[x] \in I \Rightarrow [x]$ *é dito estritamente positivo;*
$[x] \in BI \Rightarrow [x]$ *é dito não negativo;*
$[x] \in II \Rightarrow [x]$ *é dito não assimétrico positivo;*
$[x] \in BII \Rightarrow [x]$ *é dito simétrico;*
$[x] \in III \Rightarrow [x]$ *é dito assimétrico negativo;*
$[x] \in BIII \Rightarrow [x]$ *é dito não positivo;*
$[x] \in IV \Rightarrow [x]$ *é dito estritamente negativo.*

A partir dessa definição de regiões, apresenta-se um teorema para o cálculo da multiplicação intervalar com base na classificação em que os intervalos se encontram.

Teorema 2.1. *(Classificação e Cálculo da Multiplicação Intervalar): sejam [x] $\in \mathbb{IR}$ e [y] $\in \mathbb{IR}$. Então o produto [x]*[y] é calculado conforme a Figura 1.*

Figura 1: Regras para o cálculo da multiplicação.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">[x]*[y]</th><th colspan="8">[y]</th></tr>
<tr><th>O</th><th>I</th><th>BI</th><th>II</th><th>BII</th><th>III</th><th>BIII</th><th>IV</th></tr>
<tr><th rowspan="8">[x]</th><th>O</th><td rowspan="8">[0;0]</td><td colspan="7"></td></tr>
<tr><th>I</th><td>$[\underline{x}*\underline{y};\overline{x}*\overline{y}]$</td><td rowspan="2">$[0;\overline{x}*\overline{y}]$</td><td colspan="3" rowspan="2">$[\overline{x}*\underline{y};\overline{x}*\overline{y}]$</td><td rowspan="2">$[\overline{x}*\underline{y};0]$</td><td>$[\overline{x}*\underline{y};\underline{x}*\overline{y}]$</td></tr>
<tr><th>BI</th><td></td><td></td></tr>
<tr><th>II</th><td colspan="2" rowspan="3">$[\underline{x}*\overline{y};\overline{x}*\overline{y}]$</td><td>$[\min\{\underline{x}*\overline{y},\overline{x}*\underline{y}\};\overline{x}*\overline{y}]$</td><td></td><td>$[\overline{x}*\underline{y};\max\{\underline{x}*\underline{y},\overline{x}*\overline{y}\}]$</td><td colspan="2" rowspan="3">$[\overline{x}*\underline{y};\underline{x}*\underline{y}]$</td></tr>
<tr><th>BII</th><td></td><td>$[\underline{x}*\overline{y};\overline{x}*\overline{y}]=$
$[\overline{x}*\underline{y};\overline{x}*\overline{y}]=$
$[\underline{x}*\overline{y};\underline{x}*\underline{y}]=$
$[\overline{x}*\underline{y};\underline{x}*\underline{y}]$</td><td></td></tr>
<tr><th>III</th><td>$[\underline{x}*\overline{y};\max\{\underline{x}*\underline{y},\overline{x}*\overline{y}\}]$</td><td></td><td>$[\min\{\underline{x}*\overline{y},\overline{x}*\underline{y}\};\underline{x}*\underline{y}]$</td></tr>
<tr><th>BIII</th><td></td><td rowspan="2">$[\underline{x}*\overline{y};0]$</td><td colspan="3" rowspan="2">$[\underline{x}*\overline{y};\underline{x}*\underline{y}]$</td><td rowspan="2">$[0;\underline{x}*\underline{y}]$</td><td></td></tr>
<tr><th>IV</th><td>$[\underline{x}*\overline{y};\overline{x}*\underline{y}]$</td><td>$[\overline{x}*\overline{y};\underline{x}*\underline{y}]$</td></tr>
</table>

2.3 Multiplicação aritmética multidimensional RDM

Na aritmética definida por Moore existem algumas limitações com cálculos de intervalos, como intervalos com diâmetro muito grande, por exemplo. A fim de contornar essa e outras limitações, Piegat e Landowski [6,7] desenvolveram uma nova aritmética intervalar, chamada aritmética intervalar multidimensional RDM.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0321

A abreviatura RDM (do inglês, *Relative Distance Measure*) significa Medida da Distância Relativa, sendo caracterizada como multidimensional por cada novo parâmetro de incerteza de um sistema aumentar a sua dimensionalidade. Assim, quando um dado um valor x pertencente a um intervalo $\mathbf{x}$, ele é descrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{x} = \{x : x = \underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x})\}, \tag{3}$$

onde $\alpha_x \in [0,1]$ é uma variável RDM.

A Figura 2 abaixo ilustra um intervalo $\mathbf{x}$ e o valor da variável α_x.

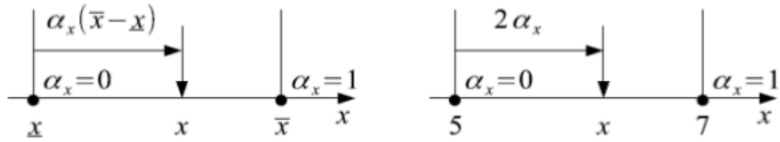

Figura 2: Variável α_x.

A partir do entendimento de como são tratados os intervalos na aritmética multidimensional, abaixo define-se a operação de multiplicação nesta aritmética. Considere os intervalos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, definidos como:

$$\mathbf{x} = \{x : x = \underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x})\}, \alpha_x \in [0,1],$$
$$\mathbf{y} = \{y : y = \underline{y} + \alpha_y(\bar{y} - \underline{y})\}, \alpha_y \in [0,1].$$

Assim, o produto intervalar entre os intervalos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \{[\underline{x} + \alpha_x(\bar{x} - \underline{x})] \times [\underline{y} + \alpha_y(\bar{y} - \underline{y})]; \alpha_x, \alpha_y \in [0, 1]\}.$$

A presente seção apresentou as propriedades e processos de calcular uma operação de multiplicação de três diferentes maneiras. Na multiplicação definida por Moore, é possível calcular o resultado do produto de dois intervalos, no qual os extremos são os valores mínimo e máximo das multiplicações entre os extremos dos intervalos multiplicadores. Já Vaccaro definiu casos com expressões otimizadas para o cálculo da multiplicação de intervalos, tornando o cálculo mais rápido e simples, matematicamente. Por último, apresentou-se o cálculo de multiplicação utilizado na mais recente definição de aritmética intervalar, a aritmética multidimensional RDM. O diferencial nessa definição é que são usadas variáveis do tipo RDM, além de que a cada novo parâmetro aumenta-se a dimensionalidade do sistema.

A próxima seção apresenta os resultados com comparações numéricas entre os três diferentes cálculos de multiplicação a partir de um exemplo. Além do resultado intervalar, realiza-se a análise de qualidade desse intervalo solução com métricas de diâmetro e erro Absoluto.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0321

3 Resultados

Para comparar os resultados das diferentes multiplicações, foi escolhido um exemplo de multiplicação do trabalho de Landowski [2]. Abaixo encontra-se a equação utilizada na aplicação.

$$C = A - A^2. \tag{4}$$

A partir da equação (4), podemos escrevê-la de duas outras formas, como mostram as equações (5) e (6):

$$C = A(1 - A). \tag{5}$$

$$C = (A - 1) + (1 - A)(1 + A). \tag{6}$$

A computação de intervalos fornece as medidas intervalares de Erro Absoluto (EA), conforme equação (7), e Erro Relativo (ER), para a análise do erro (ou qualidade do intervalo). Outra métrica muito utilizada em intervalos é o diâmetro, ou comprimento, do intervalo, calculado através da diferença entre os limites superior e inferior: $w(\mathbf{x}) = \bar{x} - \underline{x}$.

$$EA = |x - m(\mathbf{x})| < \frac{w(\mathbf{x})}{2}, \tag{7}$$

onde $m(\mathbf{x}) = (\frac{\underline{x}+\bar{x}}{2})$ é o ponto médio do intervalo $\mathbf{x}$.

Observa-se que nas medidas de erros, utiliza-se o ponto médio $m(\mathbf{x})$ do intervalo $\mathbf{x}$ para medir a distância do valor real em relação ao valor pontual do intervalo.

Salienta-se que neste trabalho não foi possível utilizar a medida de erro relativo, pois os intervalos do exemplo incluem o zero.

Calculando o valor de C das equações (4), (5) e (6), para A = [0,2], usando a aritmética de Moore, Vaccaro e RDM, obtém-se os seguintes resultados:

Tabela 1: Intervalo solução, diâmetro e erro absoluto de cada mutiplicação.

Eq.	Moore			Vaccaro			RDM		
	Sol.	w($\mathbf{x}$)	EA	Sol.	w($\mathbf{x}$)	EA	Sol.	w($\mathbf{x}$)	EA
(4)	[-4,2]	6	$0 < 3$	[-4,2]	6	$0 < 3$	[-2,1/4]	2.25	$0 < 1.125$
(5)	[-2,2]	4	$0 < 2$	[-2,2]	4	$0 < 2$	[-2,1/4]	2.25	$0 < 1.125$
(6)	[-4,4]	8	$0 < 4$	[-4,4]	8	$0 < 4$	[-2,1/4]	2.25	$0 < 1.125$

A partir da Tabela 1 é possível verificar que nas aritméticas de Moore e de Vaccaro os resultados para as três equações foram iguais. Era esperado, pois a multiplicação de Vaccaro é uma extensão do que foi definido por Moore. Sobre a diferença entre os resultados das três equações, as quais são somente uma escrita diferente de uma mesma equação, é claramente notável que a aritmética de Moore tem limitações quanto ao tamanho do intervalo, uma vez que nas equações (4) e (6) o intervalo resultante possui diâmetro maior que o intervalo para a equação (5). Já o resultado obtido com a aritmética RDM mostrou um intervalo solução igual para todas as equações e com um diâmetro menor os de Moore e Vaccaro.

Com a análise do erro absoluto verifica-se que em todos os casos a desigualdade é satisfeita, e a aritmética de RDM retornou um erro menor, reforçando a qualidade já observada com o diâmetro.

4 Conclusões

A aritmética intervalar gera resultados com uma garantia de sua incerteza, pois os possíveis erros estão contidos nesse intervalo solução. A partir disso, cada vez mais vem sendo utilizada em substituição da aritmética convencional, principalmente em sistemas críticos, os quais necessitam de resultados exatos.

O objetivo deste trabalho foi apresentar três diferentes processos de multiplicação intervalar e analisar a qualidade dos resultados gerados por cada processo.

A análise numérica, realizada através da verificação do diâmetro e erro absoluto do intervalo solução, permite confirmar a qualidade do resultado e afirmar que a aritmética RDM retorna intervalo solução com menor diâmetro e erro para a operação de multiplicação, em comparação com os processos de multiplicação devido a Moore e Vaccaro.

Referências

[1] R. B. Kearfott. Interval computations: Introduction, uses, and resources. *Euromath Bulletin*, vol. 2, 95-112, (1996), (to appear).

[2] M. Landowski. Differences between Moore and RDM Interval Arithmetic. *Proceedings of the 7th IEEE International Conference Intelligent Systems IS'2014*, vol. 1, 331-340, (2014), DOI: 10.1007/978-3-319-11313-5.

[3] R. E. Moore. *Interval Analysis.* Prentice-Hall, vol. 4, (1966).

[4] R. E. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis.* SIAM, (1979).

[5] R. E. Moore, M. Kearfott and J. Cloud. *Introduction to Interval Analysis.* SIAM, (2009).

[6] A. Piegat and M. Landowski. Is the conventional interval-arithmetic correct? *Journal of Theoretical and Applied Computer Science*, vol. 6, 27-44, (2012).

[7] A. Piegat and M. Landowski. Two interpretations of multidimensional rdm interval arithmetic-multiplication and division. *International Journal of Fuzzy Systems*, vol. 15, 488-496, (2013).

[8] H. Ratschek and J. Rokne. *New Computer Methods for Global Optimization.* Horwood Publishing Limited, (1988).

[9] G. L. R. Vaccaro, Solução de Equações Intervalares. Tese de Doutorado em Ciência da Computação, UFRGS, (2001).

