

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

# Estudo das trincas inclinadas com o Método dos Elementos de Contorno, a Função de Green Numérica e a Técnica da Dupla Reciprocidade

Carlos A. Reyna Vera-Tudela<sup>1</sup>

Departamento de Matemática, PPG em Modelagem Matemática e Computacional, UFRRJ, Seropédica, RJ

Marlon F. Corsi<sup>2</sup>

Departamento de Matemática, PPG em Modelagem Matemática e Computacional, UFRRJ, Seropédica, RJ

**Resumo.** Nos últimos anos, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem sido aplicado com sucesso a problemas da mecânica da fratura linear elástica (MFLE) envolvendo os casos estático e dinâmico. Para resolver problemas com ações de domínio (por exemplo: forças gravitacionais, problemas transientes com velocidades e acelerações, etc.) via MEC, Nardini e Brebbia apresentaram em 1982 a técnica da Dupla Reciprocidade [1], inicialmente com a intenção de resolver problemas transientes usando soluções fundamentais estáticas, mas que se revelou bastante adequado e eficaz na solução de problemas com ações de domínio. Com base no acima exposto, este trabalho apresenta estudos complementares [6] utilizando a técnica da Função de Green numérica, [4], junto com a técnica da Dupla Reciprocidade. Compara-se o efeito simulado de uma carga concentrada na viga, a ação de domínio como peso próprio, considerando o carregamento aplicado tanto no sentido positivo como negativo do eixo cartesiano  $y$ .

**Palavras-chave.** Método dos Elementos de Contorno, Função de Green, Dupla Reciprocidade

## 1 Introdução

Durante o processo industrial de fabricação de componentes estruturais ou de maquinarias, a ocorrência de defeitos internos ou impurezas do material não pode ser totalmente evitada, e é a partir destes defeitos que as trincas surgem, por citar um exemplo. Com o intuito de qualificar, quantificar e prever a vida útil do elemento ou evitar situações de risco é que surgiu a Mecânica da Fratura.

Dentro do conjunto que envolve o estudo da Mecânica da Fratura Linear Elástica, a linha de pesquisa relacionada com a elastostática tem-se mostrado muito rica pelos conceitos

---

<sup>1</sup>candres@ufrj.br

<sup>2</sup>ofmarlon@yahoo.com.br

e a diversidade de teorias aplicadas, de tal forma que chamou a atenção de pesquisadores de diferentes áreas como a mecânica dos sólidos, matemática aplicada, engenharia estrutural, ciência dos materiais, entre outros. Uma ampla variedade de métodos analíticos, experimentais e computacionais é o suporte desta área de estudos.

Assim, o campo da Mecânica da Fratura caracteriza-se por ser interdisciplinar e oferece uma fonte importante para novos descobrimentos, e novos resultados dão a oportunidade de servir em aplicações imediatas.

O estudo da Mecânica da Fratura está relacionado com a descrição quantitativa de um estado mecânico num corpo elástico contendo uma ou mais trincas. O processo de descrever o estado mecânico de um sistema particular é mediante o desenvolvimento de um modelo matemático, e então, resolver este modelo com ajuda de métodos matemáticos ou análise numérica.

Seguindo este critério, o Método dos Elementos de Contorno [2], tem-se mostrado uma ferramenta poderosa e eficiente. O uso da Função de Green numérica como solução fundamental evita a discretização do contorno da trinca quando este está descarregado, uma vez que esta solução, para força de superfície, é nula nas faces da trinca. Consequentemente, uma característica importante é tornar desnecessária a subdivisão da trinca em elementos de contorno.

O Método da Dupla Reciprocidade permite resolver problemas transientes usando soluções fundamentais da estática, e que se revelou bastante adequado e eficaz na solução de problemas com ações no domínio. O objetivo do método é transformar a integral de domínio do termo existente, em uma integral de contorno. A estratégia é fazer a substituição da grandeza que tem as características de ação de domínio pelo produto de duas outras variáveis, ficando uma delas dependente das variáveis espaciais. Desta forma, neste trabalho estuda-se o MEC, a Função de Green numérica e o método da Dupla Reciprocidade na resolução de problemas de mecânica da fratura com ações de domínio.

## 2 O MEC e a Função de Green Numérica

A Equação de Navier, que é uma equação de equilíbrio em termo de deslocamentos, é representada em um sistema 2-D como se ve na equação (1):

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj} = b_j. \quad (1)$$

onde  $b_j$  representa o efeito de domínio (neste trabalho, peso próprio),  $u$  é o deslocamento;  $G$  e  $\nu$  são constantes físicas do material.

O MEC basicamente transforma equações diferenciais parciais, que governam o domínio do problema em equações integrais envolvendo valores de contorno, após a introdução de funções de ponderação denominadas soluções fundamentais.

Considera-se que existe continuidade de deslocamentos nos pontos de contorno  $\xi$ , desta forma a representação integral da componente  $u_j$  de deslocamento é dada pela equação

(2):

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega. \quad (2)$$

onde  $\Gamma$  representa o contorno do problema;  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  na formulação tradicional correspondem à solução fundamental de Kelvin ( $u_{ij}^k$  e  $p_{ij}^k$ );  $C_{ij}$  é um coeficiente relacionado à geometria do corpo e  $\xi$  é o ponto fonte.

Neste ponto, para introduzir o conceito da Função de Green numérica, desconsidera-se o termo que corresponde à ação de domínio, sendo retomado na seguinte seção.

As funções de Green para a solução de problemas da Mecânica da Fratura podem ser obtidas pela superposição de duas soluções parciais; a primeira corresponde à solução de Kelvin, enquanto que a segunda corresponde ao problema de uma placa infinita contendo uma trinca de comprimento  $2a$ , com condição de contorno de forças prescritas ao longo de seu contorno e chamada de solução complementar, como pode-se observar na Figura 1.

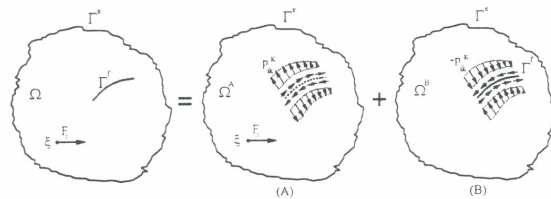


Figura 1: Carga Unitária  $F_i$  aplicada num espaço infinito com trinca descarregada (A) Problema de Kelvin; (B) problema complementar.

Desta forma a Função de Green é representada pelas equações (3) e (4):

$$u_{ij}^*(\xi, x) = u_{ij}^k(\xi, x) + u_{ij}^c(\xi, x). \quad (3)$$

$$p_{ij}^*(\xi, x) = p_{ij}^k(\xi, x) + p_{ij}^c(\xi, x). \quad (4)$$

onde  $u_{ij}^*(\xi, x)$  e  $p_{ij}^*(\xi, x)$  são respectivamente os deslocamentos e forças de superfície fundamentais, na direção  $j$  no ponto campo  $x$  devido a uma carga unitária aplicada no ponto fonte  $\xi$  na direção  $i$ .

A solução de Kelvin,  $u_{ij}^k(\xi, x)$  e  $p_{ij}^k(\xi, x)$ , é a tradicional do Método dos Elementos de Contorno, ficando para ser determinado o termo que corresponde à solução complementar  $u_{ij}^c(\xi, x)$  e  $p_{ij}^c(\xi, x)$ .

As expressões para a determinação das componentes de deslocamento e força de superfície da parte complementar da Função de Green são dadas em [5] nas equações (5) e (6), na forma de uma equação integral de contorno, como é mostrado a seguir:

$$u_{ij}^c(\xi, x) = \int_{\Gamma^f} p_{jm}^k(x, \zeta) c_{im}(\xi, \zeta) d\Gamma(\zeta). \quad (5)$$

$$p_{ij}^c(\xi, x) = \int_{\Gamma^I} P_{jm}^k(x, \zeta) c_{im}(\xi, \zeta) d\Gamma(\zeta). \quad (6)$$

sendo

$$c_{im}(\xi, \zeta) = u_{im}^c(\xi, \zeta^S) - u_{im}^c(\xi, \zeta^I). \quad (7)$$

onde  $c_{im}(\xi, \zeta)$  é a abertura fundamental da trinca na função de Green;  $S$  e  $I$  correspondem à superfície superior e inferior da trinca ( $\Gamma^F = \Gamma^S + \Gamma^I$ ).

### 3 O Método da Dupla Reciprocidade

Na Equação (2) tem-se a equação integral de contorno com uma integral de domínio na qual se vai aplicar os conceitos da Dupla Reciprocidade para transformar esta numa integral de contorno. Segundo a filosofia do Método da Dupla Reciprocidade o termo de domínio é aproximado por um somatório de funções na forma indicial seguinte (equação (8)):

$$b_j(x) = \alpha_j^m f^m = \alpha_j^1 f^1 + \alpha_j^2 f^2 + \dots + \alpha_j^n f^n. \quad (8)$$

onde os pontos  $m$  são pontos de colocação,  $f$  é uma função de aproximação e  $\alpha$  é um conjunto de coeficientes iniciais desconhecidos.

Substituindo a Equação (8) na integral de domínio da Equação (2) tem-se a seguinte expressão (equação (9)):

$$\int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega = \alpha_j^m \int_{\Omega} f^m(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega. \quad (9)$$

Para transformar o lado direito da expressão anterior numa integral de contorno, é necessário rescrever  $f^m(x)$  em termos de uma função auxiliar  $\psi_{nj}^m$  que precisa satisfazer à equação de Navier, Equação (1), com o termo de domínio sendo concentrada no domínio como se mostra a seguir (equação (10)):

$$G\psi_{nj,ii}^k + \frac{G}{1-2\nu}\psi_{ni,ij}^k = \delta_{nj}f^k. \quad (10)$$

Desta forma, substituindo a Equação (10) na Equação (9), e verificando que, por analogia, as mesmas operações já desenvolvidas na formulação tradicional podem ser empregadas, obtém-se a equação (11):

$$C_{ij}^l u_j^l + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma = (C_{ij}^l \psi_{nj}^{lm} + \int_{\Gamma} p_{ij}^* \psi_{nj}^m d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}^* \eta_{nj}^m d\Gamma) \alpha_m^n. \quad (11)$$

Nesta expressão o termo  $\eta_{nj}^m$  corresponde às forças de superfície recíprocas, referentes à função auxiliar de interpolação  $\psi_{nj}^m$ , correspondente aos deslocamentos. A Equação

(11) é discretizada dividindo-se o contorno em elementos e escrevendo-se para todos os nós  $i$  em termos de matrizes globais. Chega-se então a um sistema geral de equações dada pela equação (12):

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{p} = (\mathbf{H}\boldsymbol{\psi} - \mathbf{G}\boldsymbol{\eta})\mathbf{f}^{-1}\mathbf{b}. \quad (12)$$

A função  $f^m$  escolhida é a função linear  $r$  que quantifica a distância euclidiana entre dois pontos e que é amplamente usada na literatura.

## 4 Exemplos de Aplicação

De forma a comparar a formulação desenvolvida é estudado um problema onde a ação de domínio é o peso próprio mas em sentido reverso, ou seja seguindo a direção positiva do eixo  $y$ , aplicado a uma viga bi-apoiada com trinca centrada.

O parâmetro mais utilizado no estudo da Mecânica da Fratura Linear Elástica é o fator de intensidade de tensão ( $K$ ) que quando comparado a um valor crítico, determinado experimentalmente, permite prever o comportamento da trinca e, em consequência, a vida útil do componente trincado. Normalmente  $K$  é função da forma e tamanho da trinca, tipo de carregamento e configuração da geometria do componente estrutural. Usualmente o fator de intensidade de tensão é escrito da seguinte forma:  $K = Y\sigma\sqrt{\pi a}$  onde  $\sigma$  é a tensão;  $a$ , uma medida relacionada ao comprimento de trinca;  $Y$ , uma função adimensional da geometria da trinca.  $K_0 = \sigma\sqrt{\pi a}$  corresponde ao fator de intensidade de tensão de uma placa infinita carregada remotamente, contendo uma trinca de comprimento  $2a$ .

Neste exemplo, estuda-se uma chapa retangular com uma trinca de bordo reta e centralizada com carregamento vertical positivo, bi-apoiada, como é mostrado na Figura 2 ([3], [6]). Adotando um material linearmente elástico com as seguintes propriedades: módulo de Young igual a 1000; coeficiente de Poisson igual a 0,3, densidade igual à unidade e trinca de tamanho 7 e 8, com  $a/w = 0.7$  e  $h/w = 4$ . A discretização tem 197 nós no contorno, 96 elementos quadráticos e 40 pontos internos.

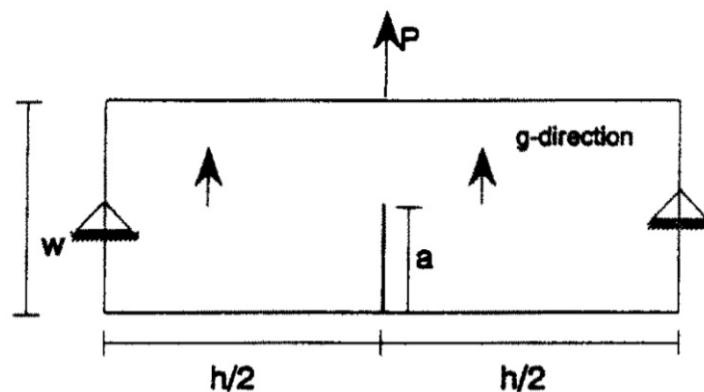


Figura 2: Chapa com carregamento reverso

Ao implementar os dados no programa, observa-se após a carga reversa ser aplicada, uma variação no Fator de Intensidade de Tensão, Tabela (1), que também resultou em uma

variação da trinca no eixo  $y$ , representado na Tabela (2), os dados tabelados descrevem uma superfície similar ao obtido na Figura 3 [3].

Tabela 1: Valores de  $K_1/K_0$ .

$h/w$	$a/w$	$K_1/K_0$	$K_1/K_0$ (Karami)
2	0.7	0.27	0.216
2	0.8	0.61	0.625
3	0.7	0.81	0.717
3	0.8	1.30	1.343
4	0.7	1.44	1.222
4	0.8	2.23	2.264

Tabela 2: Valores da Abertura da Trinca.

Nó	$C_y$
11	0.173309091
12	1.488407728
13	11.59123329
14	10.30515245
15	8.209602971
16	6.809388777
17	5.497799936
18	4.451916365
19	3.487847496
20	2.692714304
21	1.971155669
22	1.376407442
23	0.829984825
24	0.375531989

## 5 Conclusões

Neste trabalho foi estudado o Método dos Elementos de Contorno com a Função de Green Numérica e a Dupla Reciprocidade para a resolução de problemas da mecânica da fratura linear elástica numa chapa retangular com trinca reta de bordo sob uma carga de domínio do tipo reversa à força da gravidade. O estudo da trinca reta de bordo requer alguns cuidados pela dificuldade em modelar as duas superfícies da trinca e também por estar no contorno de problema, apresentando singularidades numéricas importantes.

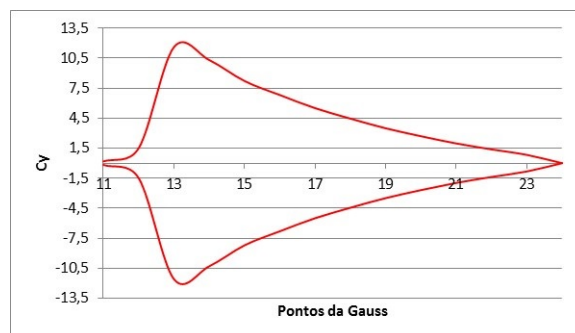


Figura 3: Gráfico da Abertura da Trinca

Os valores da abertura da trinca foram utilizados para observar o comportamento das superfícies da trinca. Os valores de  $K_I/K_0$  foram calculados e comparados com a referencia [3], sendo que os valores obtidos ficaram muito próximos.

## Referências

- [1] C. A. Brebbia, P. W. Partridge and L. C. Wrobel. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. Computational Mechanics Publications, Southampton, London, 1992.
- [2] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel. *Boundary Elements Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, London, 1984.
- [3] G. Karami and G. Kuhn. Body-Force Linear Elastic Stress Intensity Factor Calculation Using Boundary Element Method, *Computer and Structures*, 49:107–115, 1993.
- [4] J. C. F. Telles, G. S. Castor and S. Guimarães. A Numerical Green's Function approach for boundary elements applied to fracture mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:3259–3274, 1995.
- [5] J. C. F. Telles and S. Guimarães. On the use of Numerical Green's Function for SIF computations with Boundary Elements, *In first International Conference on Boundary Element Techniques*, London, 1999.
- [6] C. A. R. Vera-Tudela, Formulações Alternativas do MEC para Problemas Elastodinâmicos de Mecânica da Fratura com o uso da Função de Green Numérica, Tese de Doutorado, COPPE-UFRRJ, 2003.