Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

MIP-heurísticas para um problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes em linhas paralelas e relacionadas

Willy A. Oliveira[1]
Instituto de Matemática, UFMS, Campo Grande, MS
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos, SP
Maristela O. Santos[2]
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos, SP

Resumo. Este artigo lida com um problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção em ambientes industriais onde múltiplas linhas de produção compartilham recursos comuns. Devido à escassez desses recursos, as linhas não podem ser todas ativadas simultâneamente, tornando-se necessário determinar, a cada período, quais linhas de produção serão ativadas. O ambiente produtivo estudado também se caracteriza pela existência de custos e tempos de preparação para produção dependentes da sequência. Um modelo de otimização inteira mista para representação do problema é apresentado, bem como, heurísticas baseadas na formulação matemática do problema. Testes computacionais são realizados comparando o desempenho das heurísticas propostas neste trabalho e mostram que estes métodos têm melhor desempenho do que um resolvedor comercial.

Palavras-chave. MIP heurísticas, Dimensionamento e sequenciamento de lotes, Recusos escassos.

1 Introdução e revisão da literatura

Este trabalho considera um problema inspirado numa indústria brasileira de carnes embaladas, onde diversas linhas de produção compartilham recursos produtivos escassos (máquinas e trabalhadores). Esses recursos são utilizados em diversas linhas, de modo que, as linhas são montadas em cada período de acordo com as necessidades de produção.

A montagem das linhas requer trocas de ferramentas, alocação de trabalhadores e criação de estações de trabalho, de modo que, é desejável que as linhas sejam montadas apenas no início de cada período (dia), permanecendo ativadas até o final do mesmo. Além disso, em de cada linha, as máquinas necessitam de ajustes que dependem tanto do produto que será produzido como também do produto previamente produzido, caracterizando a existências de tempos/custos de preparação para produção dependente da sequência.

Os itens produzidos são perecíveis e necessitam de ambientes com temperatura monitorada para o armazenamento, implicando em relevantes custos de estocagem e fazendo com que o controle eficiente de estoque seja uma atividade de fundamental importância.

[1]waosoler@gmail.com
[2]mari@icmc.usp.br

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0387

Em resumo, visa-se determinar: i) quais linhas de produção serão montadas em cada período produtivo; ii) o tamanhos dos lotes de produção em cada linha ativada e em cada período; e iii) a sequência de produção em cada linha e período. O objetivo é minimizar os custos de estoque, atraso no atendimento das demandas, preparação dependente da sequência e montagem de linhas de produção.

O problema de determinar, simultaneamente, os tamanhos dos lotes e a sequência da produção a fim de minimizar os custos envolvidos é conhecido na literatura como Problema de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes - PDSL. Uma recente e completa revisão sobre o PDSL pode ser encontrada em [2]. Dentre os modelos para representação do PDSL, destaca-se o CLSD, proposto por [4], e que se caracteriza pela utilização da estrutura do problema do Caixeiro Viajante para a modelagem do sequenciamento da produção.

O PDSL pertence à classe de problemas *NP-hard* ([5]), de modo que, métodos exatos podem não encontrar soluções de boa qualidade para instâncias com tamanho real. Assim, abordagens heurísticas de solução têm sido desenvolvidas, onde destacamos as heurísticas baseadas na formulação matemática do problema (MIP heurísticas). Essas heurísticas têm se mostrado eficientes para lidar com problemas oriundos em diversas aplicações ([6–8]).

As MIP heurísticas operam por meio da decomposição das variáveis inteiras de um modelo de otimização em diversos subconjuntos e, a cada iteração, um subproblema é resolvido onde apenas as variáveis de um dos subconjuntos são otimizadas. Se o número de variáveis inteiras em cada subconjunto for significantemente menor do que o número de variáveis inteiras do modelo original, o tempo de solução será bastante reduzido ([5]).

Na Seção 2 apresenta-se um modelo de programação matemática inteira mista, enquanto que na Seção 3 propomos uma nova MIP heurística e descrevemos duas heurísticas do tipo *Relax-and-Fix*, frequentemente utilizadas na literatura em problemas de planejamento da produção, para solucionar o problema estudado. Na Seção 4 apresentamos testes computacionais a fim de comparar as abprdagens descritas na Seção 3. Por fim, as conclusões e os trabalhos futuros são apresentados na Seção 5.

2 Formulação matemática

Propomos o modelo CLSDPRL (extensão do modelo CLSD) para representar o problema estudado. A Tabela 1 apresenta os parâmetros e variáveis utilizadas e as expressões (1) a (10) definem o modelo CLSDPRL. Consideramos as seguintes características: i) demanda dinâmica e determinística que deve ser completamente satisfeita até o final do horizonte de planejamento (podendo haver atrasos penalizados na função objetivo); ii) não existe preservação da preparação entre períodos, pois as linhas podem ser fechadas no próximo período; iii) procedimentos de preparação são realizados dentro de um período; iv) para cada item existe uma única linha apta à produzí-lo; e v) considera-se itens perecíveis que não podem ser deteriorados.

$$\text{Min} \quad \sum_{t,j}(h_j I_{jt} + b_j B_{jt}) + \sum_{l,t,i,j} sc_{lij} z_{lijt} + \sum_{l,t} oc_l \delta_{lt} \tag{1}$$

$$\text{s.a.} \qquad I_{j,t-1} - B_{j,t-1} + x_{ljt} = d_{jt} + I_{jt} - B_{jt}, \qquad \forall j, t \tag{2}$$

$$\sum_j a_{lj} x_{ljt} + \sum_{i,j} st_{lij} z_{lijt} \leq C_{lt}, \qquad \forall l, t \tag{3}$$

$$m_{lj} \left(y_{ljt} + \sum_i z_{lijt} \right) \leq x_{ljt} \leq \frac{C_{lt}}{a_{lj}} \left(y_{ljt} + \sum_i z_{lijt} \right), \quad \forall l, j, t \tag{4}$$

$$\sum_j y_{ljt} = \delta_{lt}, \qquad \forall l, t \tag{5}$$

$$y_{ljt} + \sum_i z_{lijt} \geq \sum_i z_{ljit}, \qquad \forall l, j, t \tag{6}$$

$$\sum_{i,j} z_{lijt} \leq (\gamma_{lt} - 1)\delta_{lt}, \qquad \forall l, t \tag{7}$$

$$V_{ljt} \geq V_{lit} + 1 - \gamma_{lt}(1 - z_{lijt}), \qquad \forall l, t, i, j \tag{8}$$

$$I_{jt} \leq \sum_{\alpha=t+1}^{t+sl_j} d_{j\alpha}, \qquad \forall j, t \tag{9}$$

$$\sum_l r_{kl} \delta_{lt} \leq R_k, \qquad \forall k, t. \tag{10}$$

Tabela 1: Parâmetros e variáveis para o modelo CLSDPRL

Parâmetros	
T, L	Número de períodos (indexado por t) e de linhas de produção (indexado por l)
J, K	Número de produtos (indexado por i, j) e de recursos (indexado por k)
d_{jt}, C_{lt}	Demanda do produto j e capacidade da linha l no período t
a_{lj}, m_{lj}	Tempo consumido para produção unitária e lote mínimo de produção de j em l
h_j, b_j	Custo unitário de estocagem e de atraso no atendimento da demanda do item j
sc_{lij}, st_{lij}	Custo e tempo de preparação decorrente da troca de produção de i para j em l
r_{kl}	Quantidade do recurso k necessária para ativação da linha l
R_{kt}	Quantidade disponível do recurso k no período t
sl_j	vida de prateleira - tempo no qual o produto j pode permanecer em estoque
γ_{lt}	Número máximo de itens que podem ser produzidos na linha l e período t

Variáveis	
$I_{jt}, B_{jt} \geq 0$	Quantidades em estoque e atraso de j no final do período t, respectivamente
$x_{ljt}, V_{ljt} \geq 0$	Quantidade produzida e ordem de produção do item j em l e no período t
$y_{ljt} \in \{0, 1\}$	$= 1$, se j é o primeiro item produzido em l no período t e 0, caso contrário
$z_{lijt} \in \{0, 1\}$	$= 1$, se houve troca de produção (i para j) em l no período t e 0, caso contrário
$\delta_{lt} \in \{0, 1\}$	$= 1$, se a linha l está em funcionamento no período t

A função objetivo (1) representa a soma dos custos de estoque, atraso no atendimento das demandas, preparação dependente da sequência e montagem de linhas de produção, enquanto que as restrições (2) são responsáveis pelo balanceamento de estoque e o limite de capacidade é estabelecido pelas restrições (3). As restrições (4) definem um lote mínimo de produção e garantem que um produto só pode ser produzido se a linha estiver preparada para a sua produção, enquanto que as restrições (5) em conjunto com (7) garantem que os itens só podem ser produzidos em linhas ativadas e estabelecem um número máximo de produtos que podem ser produzidos por período. As restrições (6) são restrições de fluxo

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0387

e as restrições (8) são as restrições MTZ para eliminação de sub-tours. As restrições (9) garantem que os itens não são deteriorados pelo prazo de validade e as restrições (10) referem-se aos limites diponíveis de cada recurso necessário para ativação das linhas de produção. Adiciona-se as restrições $B_{jT} = 0$, $\forall j$ para garantir que todas as demandas devem ser satisfeitas dentro do horizonte de planejamento.

3 Heurísticas para o modelo CLSDPRL

Propomos nesta Seção uma heurística específica para o problema estudado (heurística D) consistindo na decomposição do problema original em sub-problemas menores. Primeiramente, um modelo é proposto a fim de determinar valores factíveis para as variáveis de aberturas de linhas (δ_{lt}) e, em seguida, os valores dessas variáveis são fixados no modelo CLSDPRL, gerando assim, um sub-problema que pode ser decomposto em L problemas com uma única linha de produção. Propomos, ainda, duas heurísiticas do tipo *Relax-and-Fix* com partições via períodos baseadas em trabalhos da literatura ([3, 5, 6]).

• Heurística D:

Seja $\overline{\delta}$ um padrão factível de montagem de linhas, isto é, uma matriz $L \times T$ de valores binários satisfazendo as restrições (10). Tomando $\delta_{lt} = \overline{\delta}_{lt}$ no modelo CLSDPRL, o modelo resultante pode ser decomposto em L sub-problemas ($SP^l, l = 1, \ldots, L$) com uma única linha e com número de períodos com variáveis a serem otimizadas menor ou igual a T.

Sejam $\overline{sl}^l$ e $\overline{st}^l$ o menor tempo de validade dentre os itens produzidos na linha l e a média aritmética entre os tempos de preparação da linha l, respectivamente. Seja, ainda, P_l o conjunto dos itens que são produzidos na linha l, $|P_l|$ a cardinalidade do conjunto P_l. Para cada linha de produção l, considere os $T + 1 - \overline{sl}^l$ intervalos compostos por $\overline{sl}^l$ períodos consecutivos do horizonte de planejamento. A equação (11) representa uma estimativa (AE_{lm}) para o número de vezes no qual a linha l deve ser montada durante o intervalo formado pelos períodos $m, \ldots, m + \overline{sl}^l - 1$, a fim de garantir que todas as demandas sejam atendidas dentro do horizonte sem que haja deterioração de produtos.

$$AE_{lm} = \left\lceil \frac{\sum_{j \in P_l} \sum_{\alpha=m}^{m+\overline{sl}^l-1} a_{lj} d_{j\alpha} + \lambda \overline{sl}^l \frac{|P_l|}{T} \overline{st}^l}{\frac{\sum_{\alpha=m}^{m+\overline{sl}^l-1} C_{l\alpha}}{\overline{sl}^l}} \right\rceil . \tag{11}$$

O numerador da equação (11) representa a soma entre o tempo consumido com a produção de toda a demanda dos itens em P_l nos períodos $m, \ldots, m + \overline{sl}^l - 1$ com uma estimativa para o tempo consumido com as preparações para produção durante os mesmos períodos, onde λ é um parâmetro com valor empiricamente determinado. Já o denominador representa a média aritmética entre as capacidades produtivas da linha l no intervalo $\{m, \ldots, m + \overline{sl}^l - 1\}$.

Propomos o modelo AL (definido por (12) a (15), juntamente com (2), (9) e (10)) como forma de obtenção de um padrão factível de abertura de linhas $\overline{\delta}$. A variável binária w_{ljt} indica se o item j é produzido na linha l durante o período t.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0387

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{t,j}(h_j I_{jt} + b_j B_{jt}) + \sum_{l,t} oc_l \delta_{lt} && (12)\\
\text{s.a.} \quad & (2), (9), (10) && \\
& m_{lj} w_{ljt} \leq x_{ljt} \leq \tfrac{C_{lt}}{a_{lj}} w_{ljt}, \qquad \forall l, j, t && (13)\\
& \sum_{j} w_{ljt} \leq \gamma_{lt}\delta_{lt}, \qquad \forall l, t && (14)\\
& \sum_{t=m}^{m+\overline{sl}^l-1} \delta_{lt} \geq AE_{lm}, \qquad \forall l, m = 1, \ldots, T - \overline{sl}^l + 1. && (15)
\end{aligned}
$$

As restrições (13) são análogas as restrições (4), enquanto que as restrições (14) definem o número máximo de itens que podem ser produzidos em cada linha e período e garantem que só existe produção em linhas montadas. As restrições (15) garantem que cada linha de produção será montada em número suficientes de vezes para suprir a demanda de cada intervalo do horizonte de planejamento.

Um pseudo-código para a heurística D é dado pelos passos 1 a 5:

1. $z = 0$;
2. Determine $\overline{\delta}$, uma solução para o problema AL;
3. Faça $\delta = \overline{\delta}$;
4. Para $l = 1, \ldots, L$ faça
    4.1. Resolva o modelo SP^l;
    4.2. $z = z + z^l$, onde z^l é a solução do modelo SP^l;
5. Retorne z.

• Heurísticas *Relax-and-Fix*:

A MIP heurística *Relax-and-Fix* - RF (proposta em [3]) é uma heurística construtiva frequentemente utilizada para lidar com problemas de produção, que opera por meio de uma partição no conjunto das variáveis inteiras de um problema em diversos subconjuntos e, a cada iteração, apenas as variáveis de um dos subconjuntos são reotimizadas, enquanto que as demais variáveis têm o seu valor fixado ou são linearmente relaxadas.

Propomos a heurística RF1, onde utiliza-se a tradicional partição por períodos, isto é, a cada iteração as variáveis referentes a um período produtivo são otimizadas, enquanto que as variáveis dos períodos anteriores são fixadas e dos posteriores são linearmente relaxadas e a heurística RF2 onde a cada iteração $i \in \{1, \ldots, \lfloor \frac{T+1}{2} \rfloor\}$, dois períodos produtivos (t e $T - t + 1$) têm suas variáveis binárias otimizadas.

4 Resultados computacionais

Utilizou-se a linguagem C++ e o *solver* Cplex 12.6 para implementação do modelo CLSDPRL e das heurísticas propostas. Utilizou-se um nó do Cluster Euler (CeMEAI) equipado com 2 Processadores Intel Xeon E5-268v2 e com 128 GB de memória RAM. O tempo limite de execução foi fixado em uma hora.

Propomos 15 instâncias de teste baseadas em cenários reais e geradas conforme as especificações a seguir. A notação $p \in U[a, b]$ indica que um número inteiro foi escolhido aleatoriamente para o parâmetro p com $a \leq p \leq b$.

1. $T = 14$, $L = 10$, $K = 7$, $J = 90$, $oc_l = 0, \forall l$, $\gamma_{lt} = 8, \forall l, t$, $st_{lij} \in U[15, 45]$ e $sc_{lij} = 2st_{lij}, \forall l, i, j$, $m_{lj} = 2, \forall l, j$, $h_j \in U[1, 10]$, $b_j = 10h_j, \forall j$, $C_{lt} = 480, \forall l, t$, $sl_j \in U[4, T], \forall j$, $a_{lj} = 1, \forall l, j \in P_l$, $r_{kl} \in U[0, 2], \forall l, k < K$ e $r_{Kl} \in U[5, 10]$, $d_{jt} \in U[0, \frac{C_{lt} - 15 * \gamma_{lt} - 90}{|P_l|}]$;

2. $R_{kt} = \max\{\max_l\{r_{kl}\}, \varphi^k \sum_l r_{kl}\}, \forall k, t$, onde $\varphi^k = 0,6, k < K$ e $\varphi^K = 0,5$ são parâmetros para representar o nível de incompatibilidade entre as linhas de produção;

3. Para cada produto, escolhemos aleatoriamente uma única linha de produção apta para produzí-lo.

O desvio médio (GAP) é definido como a diferença percentual entre os valores da função objetivo e do limitante inferior. A Tabela 3 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 3: Resultados Computacionais.

	GAP (%)				Tempo (segundos)			
inst	Cplex	RF1	RF2	D	Cplex	RF1	RF2	D
1	79,50	29,60	28,31	**18,01**	3600	2030,64	1280,19	**300,01**
2	86,38	30,38	33,80	**29,64**	3600	1965,31	1084,06	**470,00**
3	75,60	27,77	34,75	**14,54**	3600	1930,26	1198,65	**236,53**
4	82,98	26,42	29,46	**23,14**	3600	2082,42	1404,13	**247,52**
5	69,93	33,29	39,42	**14,70**	3600	2040,22	1260,11	**436,36**
6	77,95	**24,29**	26,32	24,36	3600	1994,52	1270,11	**447,23**
7	52,88	20,62	17,64	**8,24**	3600	1918,21	1273,52	**258,47**
8	76,54	17,60	15,94	**15,42**	3600	1993,13	1282,92	**386,05**
9	65,13	23,90	24,19	**10,85**	3600	2063,21	1532,03	**269,67**
10	51,41	19,96	19,69	**8,27**	3600	1918,16	1096,93	**488,85**
11	86,45	29,41	30,03	**10,98**	3600	1958,72	1219,47	**152,29**
12	94,49	23,43	24,73	**16,11**	3600	1957,93	1145,14	**431,53**
13	80,92	21,80	26,92	**15,75**	3600	2141,10	1349,57	**353,09**
14	60,50	**15,08**	16,27	15,80	3600	1950,71	1169,45	**459,55**
15	93,24	29,57	**28,97**	37,56	3600	2028,20	1431,29	**432,36**
Geral	75,59	24,88	26,43	**17,56**	3600	1998,18	1266,50	**357,97**

Observa-se (Tabela 3) que a heurística proposta D obteve o menor GAP e, consequentemente, o melhor valor para função objetivo em 12 instâncias com GAP geral significantemente menor do que as demais abordagens. Além disso, a heurística D obteve o menor tempo de execução em todas as instâncias. O tempo médio geral foi reduzido em cerca de 71%, 82% e 90% com relação às heurísticas RF2, RF1 e ao Cplex, respectivamente.

Assim, a heurístia D possui potencial para ser utilizada como procedimento para encontrar soluções iniciais para o modelo CLSDPRL para alimentar procedimentos de refinamento, tais como, heurísticas do tipo busca local e a MIP heurística *Fix-and-Optimize*.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0387

5 Conclusões

Neste trabalho descrevemos um problema real de dimensionamento e sequenciamento de lotes baseado numa indústria alimentícia, propomos um modelo de otimização inteira mista e heurísticas para solução do mesmo. Testes computacionais, realizados em instâncias baseadas em cenários reais, mostraram que a principal abordagem proposta (heurística D) possui melhor desempenho do que as heurísticas *Relax-and-Fix* existentes na literatura e do que o *solver* Cplex 12.6, fornecendo melhores soluções em 80% das instâncias e apresentando tempo de execução significantemente menor em todos os casos.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e ao Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria - CeMEAI (CEPID FAPESP No. 2013/07375-0) pelo apoio financeiro.

Referências

[1] H. Chen, Fix-and-optimize and variable neighborhood search approaches for multi-level capacitated lot sizing problems. *Omega*, 2015.

[2] K. Copil, M. Wörbelauer, H. Meyr, and H. Tempelmeier. Simultaneous lotsizing and scheduling problems: a classification and review of models. *OR Spectrum*, 39(1), 1-64, 2017.

[3] C. Dillenberger, L. F. Escudero, A. Wollensak, and W. Zhang. On practical resource allocation for production planning and scheduling with period overlapping setups. *European Journal of Operational Research*, 75(2), 275-286, 1994.

[4] K. Haase, Capacitated lot-sizing with sequence dependent setup costs. *Operations-Research-Spektrum*, 1996.

[5] R. J. W. James, and B. Almada-Lobo, Single and parallel machine capacitated lotsizing and scheduling: New iterative MIP-based neighborhood search heuristics. *Computers & Operations Research*, 2011.

[6] Ç. Sel, and B. Bilgen, Hybrid simulation and MIP based heuristic algorithm for the production and distribution planning in the soft drink industry. *Journal of Manufacturing Systems*, v. 33, n. 3, p. 385-399, 2014.

[7] C. F. M. Toledo, M. S. Arantes, M. Y. B. Hossomi, P. M. França, and K. Akartunali. A relax-and-fix with fix-and-optimize heuristic applied to multi-level lot-sizing problems. *Journal of Heuristics*, 2015.

[8] J. Xiao, C. Zhang, L. Zheng, and J. N. Gupta. MIP-based fix-and-optimise algorithms for the parallel machine capacitated lot-sizing and scheduling problem. *International Journal of Production Research*, 2013.

