Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Explorando paradoxos geométricos nas aulas de Geometria

Rudimar Luiz Nós[1]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR
Francielle Gonçalves Sentone[2]
Escola Estadual Professora Abigail dos Santos Corrêa, Matinhos, PR

Resumo. Apresentamos neste trabalho os paradoxos geométricos de Curry e de Hooper, assim como os resultados das atividades envolvendo esses paradoxos aplicadas em turmas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. O intuito é empregar a Matemática Recreativa em atividades lúdicas para explorar conceitos geométricos e verificar como os estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio empregam conceitos e definições para solucionar problemas geométricos.

Palavras-chave. Matemática Recreativa, paradoxo de Curry, paradoxo de Hooper.

Abstract. We present in this work the geometric paradoxes of Curry and Hooper, as well as the results of the activities involving these paradoxes applied in Elementary and High School classes. The purpose is to use Recreational Mathematics in playful activities to explore geometric concepts and to verify how students of Elementary and Secondary Education use concepts and definitions to solve geometric problems.

Keywords. Recreational Mathematics, Curry's paradox, Hooper's paradox.

1 Introdução

Um paradoxo é uma declaração que vai contra o censo comum, expectativas ou definições; é uma proposição que, apesar de aparentar um raciocínio coerente, demonstra falta de lógica, escondendo contradições decorrentes de uma análise incorreta de sua estrutura interna; é o oposto do que alguém pensa ser a verdade. Na Filosofia e na Lógica, por exemplo, os paradoxos são importantes argumentos críticos e já foram responsáveis pela organização ou reorganização de fundamentos de várias áreas do conhecimento.

A palavra paradoxo provém do grego *paradoksos*: o prefixo *para* significa contrário a, ou oposto de, e o sufixo *doxo*, opinião. No latim, *paradoxum* é uma sentença que se opõe à opinião comum. Como figura de linguagem (ou pensamento), paradoxo é, na definição de Rocha Lima em Gramática Normativa da Língua Portuguesa, "a reunião de ideias contraditórias em um só pensamento, o que nos leva a enunciar uma verdade com aparência de mentira". Um bom exemplo é a primeira versão conhecida do paradoxo do mentiroso, atribuída a Eubulides de Mileto (século IV a.C.) [2].

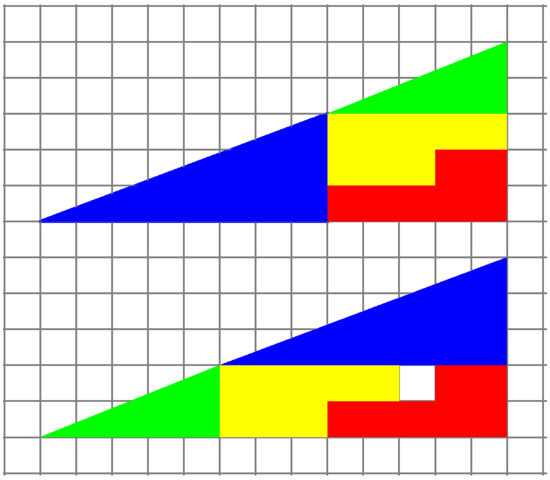
[1]rudimarnos@utfpr.edu.br
[2]fran.sentone@gmail.com

Paradoxo 1.1 (Paradoxo do mentiroso)**.** *Um homem diz que está mentindo. O que ele diz é verdadeiro ou falso?*

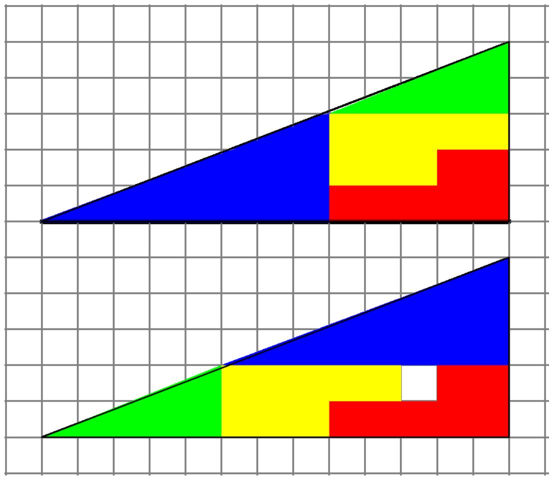
Para Farlow [3], "The best paradoxes are the easiest to state and the hardest to resolve", ou seja, os melhores paradoxos são os mais fáceis de afirmar e os mais difíceis de resolver. Então, solucionar um paradoxo seria como desvendar um truque? Seria mágica? Poderíamos, enquanto professores de Matemática, empregar paradoxos de forma lúdica para introduzir/investigar conceitos, principalmente geométricos? Para Alves e Morais Filho [1], a resposta é sim. Segundo eles, "Os Paradoxos Geométricos são tratados na Matemática Recreativa, desenvolvendo habilidades de raciocínio matemático por parte do aluno, tornando a Matemática e o raciocínio lógico dedutivo mais atrativos".

2 Paradoxo de Curry

O paradoxo de Curry é uma ilusão de ótica com figuras geométricas planas criado pelo famoso mágico amador norte-americado Paul Jerome Curry (1917-1986). Devido à ilusão, muitos autores não o consideram um paradoxo geométrico. No paradoxo do quadrado perdido, como também é chamado, quatro figuras são reagrupadas de maneira a faltar um quadrado, como ilustra a Figura 1(a).



(a) Paradoxo de Curry: o enigma do quadrado perdido.



(b) Desvendando o paradoxo de Curry.

Figura 1: Construção do paradoxo de Curry no Geogebra - [6].

Para desvendar o paradoxo de Curry, podemos empregar conceitos geométricos tais como o cálculo de áreas, o Teorema de Pitágoras, a semelhança de triângulos e a declividade da reta. O emprego destes conceitos conduz à conclusão de que os triângulos retângulos de catetos de medidas $5uc$ e $13uc$ da Figura 1(a) são uma ilusão de ótica. Na verdade, eles são quadriláteros é há uma diferença de áreas, como comprova a Figura 1(b).

Os números 2, 3, 5, 8 e 13, medidas dos catetos dos três triângulos retângulos da Figura

1(a), são termos consecutivos da sequência de Fibonacci

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ S_{n-1} + S_{n-2}, & n \geq 2. \end{cases} \tag{1}$$

Gardner [4] descreve o sistema de equações (2) para calcular os ganhos ou perdas de área em figuras que têm os números da sequência de Fibonacci como medida dos lados.

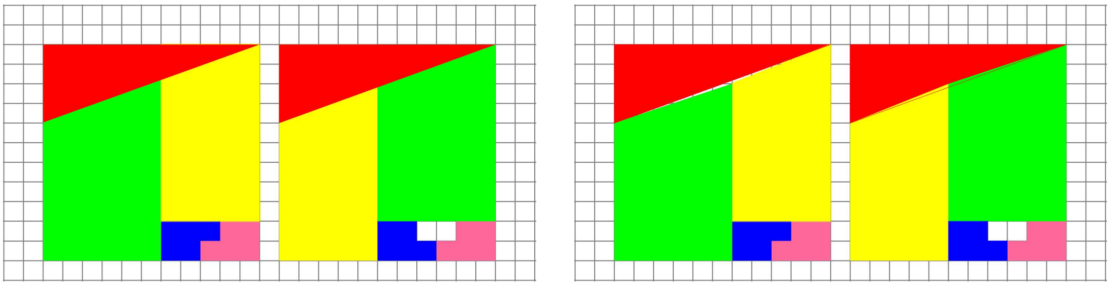
Proposição 2.1. *Sejam A, B e C três números consecutivos da sequência de Fibonacci e X a perda ou ganho de área. As equações do sistema*

$$\begin{cases} A + B = C, \\ B^2 = A \cdot C \pm X, \end{cases} \tag{2}$$

relacionam A, B, C e X.

No sistema (2), a segunda equação é a Identidade de Cassini (Jean-Dominique Cassini (1625-1712)). Considerando nesse sistema $A = 5$, $B = 8$ e $C = 13$, obtemos $X = -1$. Desse modo, $X = -1$ significa que o reagrupamento das peças na Figura 1(a) provocou o ganho de um quadrado unitário.

Outra forma do paradoxo de Curry é a forma quadrada. Nesta, um quadrado de lado ℓ é divido em peças que formam outro quadrado de lado ℓ, porém com um "buraco". Curry trabalhou em muitas variações de quadrados, mas não conseguiu construir um quadrado que pudesse ser dividido em menos de cinco peças e ainda produzisse um "buraco" que não tocasse a borda. A Figura 2 ilustra uma das formas quadradas propostas por Curry.



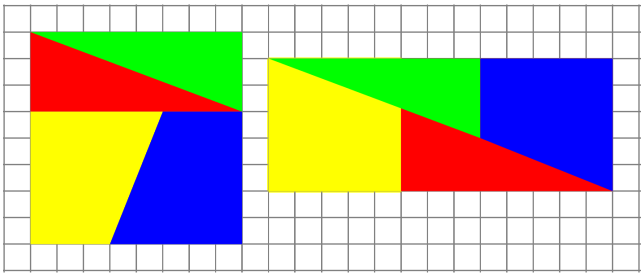
(a) Forma quadrada do paradoxo de Curry.

(b) Desvendando a forma quadrada do paradoxo de Curry.

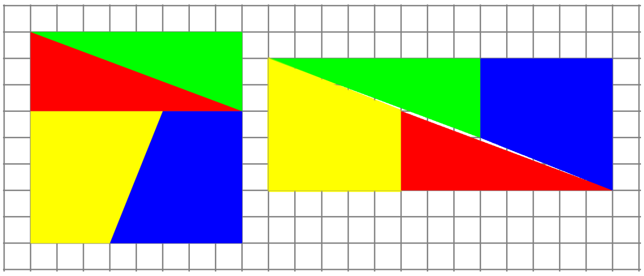
Figura 2: Construção da forma quadrada do paradoxo de Curry no Geogebra - [6].

3 Paradoxo de Hooper

Segundo Gardner [4], outro paradoxo que provoca a perda ou o ganho de área é encontrado originalmente em *Rational Recreations* de William Hooper, uma obra de quatro volumes publicada em Londres em 1774. O paradoxo de Hooper consiste na divisão de uma figura em peças e no reagrupamento destas para formar outra figura, porém com área diferente da figura original. Gardner [4] e de Mello e Souza [7] apresentam um quadrado com lado medindo $8uc$, de área $64ua$, transformado em um retângulo de dimensões $5uc$ e $13uc$, de área $65ua$, como ilustra a Figura 3(a). Neste caso, podemos observar na Figura 3(b) que o quadrado de lado $8uc$ não tem falhas, enquanto no retângulo falta uma área próxima à diagonal. Esta área meda $1ua$, exatamente o que o quadrado tem a menos do que o retângulo. Novamente, podemos utilizar conceitos geométricos para investigar a ilusão provocada pelo reagrupamento das peças.



(a) Paradoxo de Hooper: $64 = 65$?



(b) Desvendando o paradoxo de Hooper: $64 = 65$?

Figura 3: Construção do paradoxo de Hooper no Geogebra - [6].

4 Atividades aplicadas em sala de aula

4.1 Ensino Fundamental

A atividade com quatro questões foi aplicada no dia 06 de dezembro de 2016 em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual em Matinhos-PR. Dos 22 estudantes dessa turma, 17 estavam presentes no dia em que a atividade foi aplicada. Discutimos com os estudantes o que seria um paradoxo e apresentamos o paradoxo de Curry projetando a imagem dos triângulos da Figura 1(a) feitos em Etil Vinil Acetato - EVA e também construindo os mesmos com o auxílio do Geogebra. Conceitos geométricos como área de algumas figuras planas e o Teorema de Pitágoras foram revistos. Essa primeira parte durou 50min, o tempo de uma aula. Na aula seguinte, durante mais 50min, os estudantes responderam, trabalhando individualmente, às questões que seguem. A Figura 4 mostra os resultados gerais da atividade.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0365

Questão 4.1 (1^a questão). *A soma das áreas de cada peça é igual à área dos triângulos formados pelas peças?*

Questão 4.2 (2^a questão). *Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa dos três triângulos retângulos. O que você conclui? Empregue a máquina calculadora para justificar sua conclusão.*

Questão 4.3 (3^a questão). *Observando a figura e a sua construção no Geogebra, o que você conclui sobre os triângulos formados pelas peças e sobre o quadrado perdido?*

Questão 4.4 (4^a questão). *Com base nas conclusões sobre o paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o paradoxo de Hooper?*

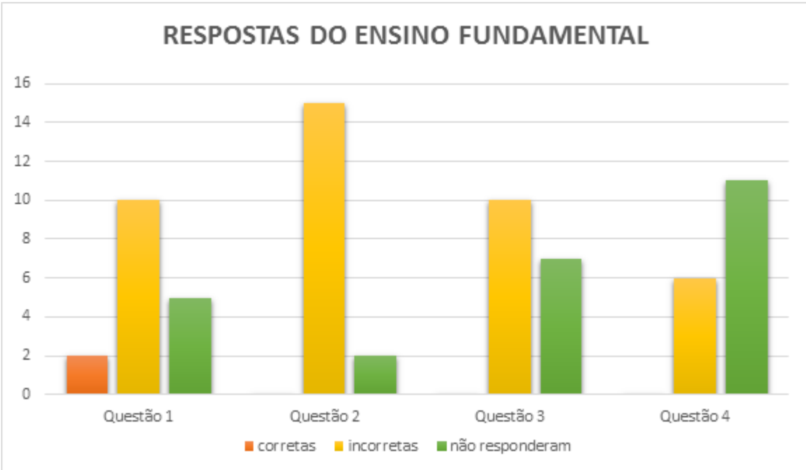


Figura 4: Respostas às questões da atividade para o Ensino Fundamental [6].

4.2 Ensino Médio

A atividade com cinco questões foi aplicada no dia 16 de novembro de 2016 em uma turma do 3º ano do Ensino Médio de um colégio público estadual em Matinhos-PR. Dos 39 estudantes dessa turma, 30 estavam presentes no dia em que a atividade foi aplicada e 24 responderam às questões propostas. Discutimos com os estudantes o que seria um paradoxo e apresentamos o paradoxo de Curry projetando a imagem dos triângulos da Figura 1(a) feitos em EVA e também construindo os mesmos com o auxílio do Geogebra. Conceitos de Geometria Analítica, como a equação geral da reta e o coeficiente angular da reta, foram revisados. Essa primeira parte durou uma aula de 50min. Na aula seguinte, durante mais 50min, os estudantes responderam, trabalhando individualmente, às questões listadas a seguir. Diferentemente do Ensino Fundamental, observamos o desinteresse generalizado dos estudantes pela atividade, sendo que muitos não entregaram suas respostas ou entregaram o roteiro contendo apenas o nome. A Figura 5 ilustra os resultados gerais da atividade.

Questão 4.5 (1^a questão). *Determine a equação geral* $y = mx + n$ *da reta suporte da diagonal dos retângulos de dimensões* 13×5, 8×3 *e* 5×2. *Use a máquina calculadora para determinar o ângulo de inclinação das retas.*

Questão 4.6 (2^a questão). *No primeiro triângulo formado pelas quatro peças, calcule: a)* $y(0)$ *; b)* $y(8)$*; c)* $y(13)$. *As imagens calculadas coincidem com os valores verificados na Figura?*

Questão 4.7 (3^a questão). *No segundo triângulo formado pelas quatro peças, calcule: a)* $y(0)$*; b)* $y(5)$*; c)* $y(13)$. *As imagens calculadas coincidem com os valores verificados na Figura?*

Questão 4.8 (4^a questão). *Observando a figura e a sua construção no Geogebra, o que você conclui sobre os triângulos formados pelas peças e sobre o quadrado perdido?*

Questão 4.9 (5^a questão). *Com base nas conclusões sobre o paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o paradoxo de Hooper?*

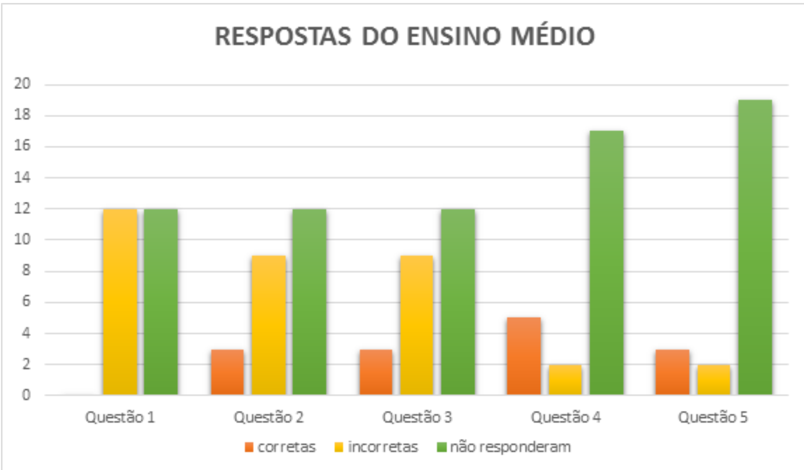


Figura 5: Respostas às questões da atividade para o Ensino Médio [6].

5 Conclusões

Apresentamos neste trabalho os paradoxos geométricos de Curry e de Hooper e os empregamos para avaliar, de forma lúdica, a aprendizagem de conteúdos de Geometria Plana e de Geometria Analítica. A partir da análise das respostas dos roteiros de atividades que aplicamos em sala de aula, verificamos que os estudantes das turmas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio têm dificuldades para empregar conceitos e definições; uma minoria é capaz de efetuar os cálculos associados corretamente e, ainda, uma parte desta minoria não sabe como usar esses cálculos para justificar a solução dos problemas propostos.

Mesmo constando nos Parâmetros Curriculares Nacionais para Matemática, os resultados das atividades, principalmente no que diz respeito ao cálculo de áreas, nos fazem pensar que a Geometria é negligenciada ou pouco abordada/explorada em sala de aula no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Pavanelo [5], em 1989, já afirmava/questionava:

> Quanto ao ensino de Geometria, o problema torna-se ainda mais grave: constata-se que ele vem gradualmente desaparecendo do currículo real das escolas. Será que este conhecimento não é necessário ao homem moderno? Terá a geometria perdido sua importância do ponto de vista educacional? Que outros motivos fizeram com que ela fosse praticamente expulsa da sala de aula?

Transcorridos quase trinta anos, a situação nos parece a mesma ou pior. Assim, devemos, enquanto professores de Matemática, trabalhar para incluir efetivamente a Geometria no currículo da Educação Básica. Deveríamos também empregar jogos e atividades lúdicas para estabelecer/explorar conceitos geométricos. Usar a Matemática Recreativa, que mistura o lúdico com diversão e imaginação e até mesmo mágica, pode ser estimulante, tanto para estudantes quanto para professores, à aprendizagem em Geometria.

Agradecimentos

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

Referências

[1] E. C. A. Alves e D. C. de Morais Filho. *Paradoxos geométricos recreativos como recurso didático*. VII Semana de Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, s.d..

[2] A. P. Aprosio. *Pinóquio no país dos paradoxos*. Zahar, Rio de Janeiro, 2015.

[3] S. J. Farlow. *Paradoxes in mathematics*. Dover, New York, 2014.

[4] M. Gardner. *Mathematics, magic and mystery*. Dover, New York, 1956.

[5] R. M. Pavanello. O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica. Dissertação de Mestrado, Unicamp, 1989.

[6] F. G. Sentone. Paradoxos geométricos em sala de aula. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, 2017.

[7] J. C. de Mello e Souza. *Matemática divertida e curiosa*. 15. ed. Record, Rio de Janeiro, 2001.

