Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Autovalores do Produto Forte

Bruna Santos de Souza[1]
Departamento de Matemática e Estatística, UFRGS, Porto Alegre, RS
Vilmar Trevisan[2]
Departamento de Matemática e Estatística, UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo. Neste trabalho, estudamos a operação entre grafos conhecida por produto forte. Escrevemos a matriz resultante em termos de produto de Kronecker entre matrizes e determinamos parte dos autovalores das matrizes de adjacências e laplaciana sem sinal e todo o conjunto de autovalores da matriz laplaciana do grafo resultante para um caso particular desta operação.

Palavras-chave. Teoria Espectral de Grafos, Autovalores, Produto Forte

1 Introdução

Dado um grafo $G = (V, E)$, onde V é o conjunto dos vértices e E é o conjunto das arestas, podemos associar a ele diferentes matrizes e denominamos de M-espectro de G os autovalores da matriz M associada ao grafo G. Na Teoria Espectral de Grafos, estuda-se os autovalores da matriz M associada e o objetivo é descobrir propriedades dos grafos a partir de seu espectro.

As matrizes que estudaremos neste trabalho serão as matrizes de adjcências, laplaciana e laplaciana sem sinal. A matriz de adjacências, denominada $A(G)$, é uma matriz simétrica da forma $a_{ij} = 1$ se os vértices v_i e $v_j \in V$ forem adjacentes e 0 caso contrário. A matriz laplaciana é dada por $L(G) = D(G) - A(G)$, onde $D(G)$ é a matriz diagonal formada pelos graus dos vértices de G. Já a matriz laplaciana sem sinal é dada na forma $Q(G) = D(G) + A(G)$. Denotaremos por $spect_M(G)$ o espectro de G em relação à matriz M, exceto quando estivermos falando da matriz de adjacências, nesse caso usaremos apenas $spect(G)$.

Estudar o espectro de grafos resultantes de alguma operação entre dois grafos torna-se útil na Teoria Espectral de Grafos por se tratar de uma nova ferramenta para obter espectro de uma classe de grafos. Em [2], Hammack, Imrich e Klavžar fazem um extenso apanhado sobre produtos entre grafos. Neste trabalho, os autores definem produto entre grafos como uma operação onde o grafo resultante tem como conjunto de vértices o produto cartesiano entre os conjuntos de vértices dos grafos originais e as adjacências serão determinadas diferentemente para cada produto. Além disso, os autores descrevem produtos mais conhecidos como o produto cartesiano e também outros menos desenvolvidos.

[1]brunasouza@ufrgs.br
[2]trevisan@mat.ufrgs.br

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0329

Em nosso trabalho, vamos mostrar a matriz de adjacências para o produto forte que é um resultado já conhecido na literatura. Nossa contribuição original é apresentar as matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal do produto forte, bem como a caracterização dos autovalores de um caso particular deste produto.

2 Resultados Preliminares

Para a demonstração dos resultados principais, precisaremos de um resultado auxiliar, que pode ser visto em [1] e está enunciado abaixo como um Lema.

Considere a matriz simétrica M de ordem n formada pelos blocos $A \in \mathbb{R}^{t\times t}$, $\beta \in \mathbb{R}^{t\times s}$, $B, C \in \mathbb{R}^{s\times s}$ tais que $n = t + cs$, onde c é o número de cópias do bloco B. Esses blocos devem respeitar as dimensões mínimas $t \geq 0$, $s \geq 1$ e $c \geq 1$, isso significa que o bloco A e β podem não existir e há, no mínimo um bloco B não nulo.

$$M = \begin{bmatrix} A & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta^T & B & C & \cdots & C \\ \beta^T & C & B & \cdots & C \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^T & C & \cdots & C & B \end{bmatrix} \tag{1}$$

O bloco β é chamado de matriz relação entre os blocos A e B, o bloco C é chamado de matriz relação entre os blocos B. Já que M é simétrica, A, B e C também serão simétricos.

Denotaremos por $\sigma(X)$ o espectro da matriz X, ou seja o conjunto dos autovalores da matriz X e por $\sigma^{(q)}(X)$ o conjunto dos autovalores de X com multiplicade q.

Lema 2.1. *Seja M uma matriz na forma dada em (1), com $c \geq 1$ cópias do bloco B. Então:*

(i) $\sigma(B - C) \subseteq \sigma(M)$ *com multiplicidade* $c - 1$.

(ii) $\sigma(M)\setminus\sigma^{(c-1)}(B-C) = \sigma(M')$ *é o conjunto formado pelos* $t+s$ *autovalores restantes de* M*, onde*

$$M' = \begin{bmatrix} A & \sqrt{c}\cdot\beta \\ \sqrt{c}\cdot\beta^T & B + (c-1)C \end{bmatrix}$$

Ou seja, o Lema 2.1 nos mostra que $\sigma(M) = \sigma^{(c-1)}(B - C) \cup \sigma(M')$.

Em nosso trabalho, utilizaremos o caso particular em que $t = 0$, $c = 2$ e $s = 2$. Ou seja, nossa matriz M não terá os blocos A, β e β^T e terá apenas duas cópias do bloco B.

$$M = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \tag{2}$$

Dessa forma, $\sigma(M) = \sigma^{(2-1)}(B - C) \cup (M') = \sigma(B - C) \cup (M')$, onde

$$M' = \begin{bmatrix} B + (2-1)C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B + C \end{bmatrix}$$

Portanto, dada a matriz M, da forma dada em (2), temos que

$$\sigma(M) = \sigma(B - C) \cup \sigma(B + C)$$

Outra definição importante será a de produto de Kronecker para matrizes [3], denotado por $\otimes$. Essa operação terá como resultado uma matriz em blocos, como podemos ver a seguir.

Definição 2.1. *Sejam $A \in \mathcal{F}^{m\times m}$ e $B \in \mathcal{F}^{n\times n}$,*

$$A \otimes B = [a_{ij}B]_{i,j=1}^{m} = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m}B & a_{2m}B & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix} \tag{3}$$

Os resultados apresentados neste trabalho serão acerca do produto forte entre dois grafos.

Definição 2.2. *Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ tais que $(u_1, ..., u_n)$ são os vértices de G_1 e $(v_1, ..., v_m)$ são os vértices de G_2 . O produto forte entre G_1 e G_2, denotado por $G_1 \boxtimes G_2$, tem conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$ e (u_i, v_j) é adjacente a (u_ℓ, v_p) se $u_i = u_\ell$ e v_j é adjacente a v_p em G_2, ou $v_j = v_p$ e u_i é adjacente a u_ℓ em G_1, ou u_i é adjacente a u_ℓ em G_1 e v_j é adjacente a v_p em G_2.*

Na Figura 1, temos um exemplo de produto forte.

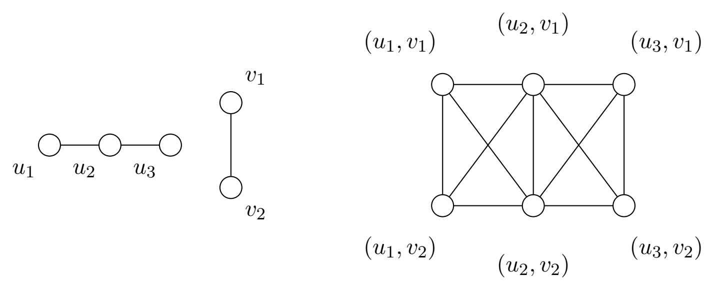

Figura 1: P_3, P_2 e $P_3 \boxtimes P_2$

3 Matrizes do Produto Forte

O objetivo é encontrar o espectro do grafo resultante da operação produto forte entre outros dois grafos, portanto, será necessário determinar como será a matriz desse grafo resultante. Para isso, realizamos um estudo prévio do comportamento das matrizes trabalhadas (de adjacências, laplaciana e laplaciana sem sinal). Apresentaremos, a seguir, o

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0329

resultado sem prova com a forma fechada das matrizes em função do produto de Kronecker. A matriz de adjacências já era conhecida na literatura [2], já as matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal serão apresentadas aqui e sua demonstração pode ser vista em [4].

Dados grafos G_1 com n vértices e G_2 com m vértices, as matrizes do produto forte serão:

$$A(G_1 \boxtimes G_2) = A(G_1) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n \otimes A(G_2) + A(G_1) \otimes A(G_2)$$

$$L(G_1 \boxtimes G_2) = L(G_1) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n \otimes L(G_2) + D(G_1) \otimes D(G_2) - A(G_1) \otimes A(G_2)$$

$$Q(G_1 \boxtimes G_2) = Q(G_1) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n \otimes Q(G_2) + D(G_1) \otimes D(G_2) + A(G_1) \otimes A(G_2).$$

onde, $\otimes$ trata-se da operação produto de Kronecker entre matrizes e suas propriedades estão em [3] e $\mathbb{I}_j$ trata-se da matriz identidade de ordem j.

4 Resultados Principais

Nesta seção obteremos alguns autovalores do produto forte entre o caminho P_2 e um grafo qualquer. Em particular, obtemos todo o espectro do grafo resultante para a matriz laplaciana.

Teorema 4.1. *Seja P_2 o caminho com dois vértices e o grafo $G_2 = (V_2, E_2)$, onde $|V_2| = m$. O número -1 será autovalor de $A(P_2 \boxtimes G_2)$, no mínimo, m vezes.*

Demonstração. Sabemos que $A(P_2 \boxtimes G_2) = A(P_2) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_2 \otimes A(G_2) + A(P_2) \otimes A(G_2)$. Logo

$$A(P_2 \boxtimes G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbb{I}_m + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes A(G_2) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes A(G_2)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_m \\ \mathbb{I}_m & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A(G_2) & 0 \\ 0 & A(G_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A(G_2) \\ A(G_2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(G_2) & A(G_2) + \mathbb{I}_m \\ A(G_2) + \mathbb{I}_m & A(G_2) \end{bmatrix}.$$

Pelo Lema 2.1, temos que $spect(P_2 \times G_2) = \{spect(-\mathbb{I}_m)\} \cup \{spect(\mathbb{I}_m + 2A(G_2))\}$. Dessa forma, o autovalor -1 estará no espectro de $P_2 \boxtimes G_2$, no mínimo, m vezes.

$\square$

Teorema 4.2. *Seja P_2 o caminho de dois vértices e o grafo $G_2 = (V_2, E_2)$ com m vértices. Se d_{v_i} é grau de algum vértice v_i de G_2, então $2d_{v_i}$ será autovalor de $Q(P_2 \boxtimes G_2)$.*

Demonstração. Como visto anteriormente,
$Q(P_2 \boxtimes G_2) = Q(P_2) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_2 \otimes Q(G_2) + D(P_2) \otimes D(G_2) + A(P_2) \otimes A(G_2)$.
Logo,
$Q(P_2 \boxtimes G_2) =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbb{I}_m + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes Q(G_2) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes D(G_2) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes A(G_2)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & \mathbb{I}_m \\ \mathbb{I}_m & \mathbb{I}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q(G_2) & 0 \\ 0 & Q(G_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D(G_2) & 0 \\ 0 & D(G_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A(G_2) \\ A(G_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m + Q(G_2) + D(G_2) & \mathbb{I}_m + A(G_2) \\ \mathbb{I}_m + A(G_2) & \mathbb{I}_m + Q(G_2) + D(G_2) \end{bmatrix}$$

Também, pelo Lema 2.1, teremos:

$$spect_Q(P_2 \boxtimes G_2) = \{spect(2Q(G_2) + 2\mathbb{I}_m)\} \cup \{spect(2D(G_2))\}.$$

Os autovalores de $2D(G_2)$ são $2d_{v_i}$. Logo $2d_{v_i}$ será autovalor de $Q(P_2 \boxtimes G_2)$.

□

Teorema 4.3. *Seja o caminho P_2 de dois vértices e o grafo $G_2 = (V_2, E_2)$ com m vértices tal que d_{v_i} é o grau do vértice v_i de G_2 e sejam $\lambda_1, ..., \lambda_m$ os L-autovalores de G_2. Teremos que $2\lambda_1, ..., 2\lambda_m, 2d_{v_1} + 2, ..., 2d_{v_m} + 2$ serão os $2m$ L-autovalores autovalores de $P_2 \boxtimes G_2$.*

Demonstração. Sabemos que:
$L(P_2 \boxtimes G_2) = L(P_2) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_2 \otimes L(G_2) + D(P_2) \otimes D(G_2) - A(P_2) \otimes A(G_2)$.
Logo,
$L(P_2 \boxtimes G_2) =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbb{I}_m + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes L(G_2) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes D(G_2) - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes A(G_2)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & -\mathbb{I}_m \\ -\mathbb{I}_m & \mathbb{I}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L(G_2) & 0 \\ 0 & L(G_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D(G_2) & 0 \\ 0 & D(G_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A(G_2) \\ A(G_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m + L(G_2) + D(G_2) & -\mathbb{I}_m - A(G_2) \\ -\mathbb{I}_m - A(G_2) & \mathbb{I}_m + L(G_2) + A(G_2) \end{bmatrix}$$

Utilizando, novamente, o Lema 2.1 temos que $spect_L(P_2 \boxtimes G_2 = \{2spect_L(G_2)\} \cup \{spect(2\mathbb{I}_m + 2D(G_2)\}$

Dessa forma o L-espectro de $P_2 \boxtimes G_2$ serão os $2m$ números $2\lambda_1, ..., 2\lambda_m, 2d_{v_1} + 2, ..., 2d_{v_m} + 2$, onde λ_i é autovalor de $L(G_2)$ e d_{v_i} é o grau do vértice v_i de G_2.

□

Note que, como um resultado complementar, podemos afirmar que se tivermos G_2 com L-espectro inteiro, teremos que $P_2 \boxtimes G_2$ também terá L-espectro inteiro.

Vejamos um exemplo na Figura 2.

As matrizes de G_2 e os respectivos espectros serão

$$A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Q(G_2) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, L(G_2) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$spect(G_2) = \{-1.4, -1, 0.3, 2.1\}, spect_Q(G_2) = \{0.4, 1, 2, 4.5\}, spect_L(G_2) = \{0, 1, 3, 4\}.$

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0329

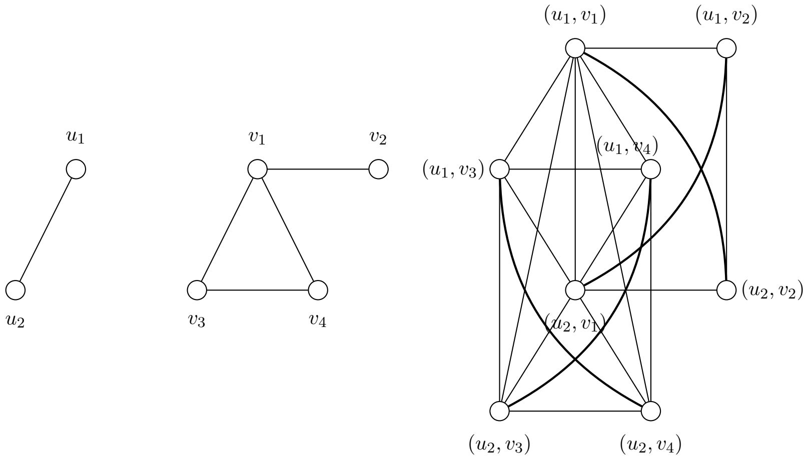

Figura 2: P_2, G_2 e $P_2 \boxtimes G_2$

Temos as matrizes de $P_2 \boxtimes G_2$ e seus espectros

$$A(P_2 \boxtimes G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Q(P_2 \boxtimes G_2) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$L(P_2 \boxtimes G_2) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$spect(P_2 \boxtimes G_2) = \{\underbrace{-1, -1, -1, -1, -1}_{|V_2|}, -1.9, 1.6, 5.3\}$$

$$spect_Q(P_2 \boxtimes G_2) = \{\underbrace{2, 4, 4, 6}_{2d_{v_i}}, 2, 4, 6, 8, 11.1\}$$

$$spect_L(P_2 \boxtimes G_2) = \{ \underbrace{0, 2, 6, 8,}_{2\{spect_L(G_2)\}} \underbrace{4, 6, 6, 8}_{2d_{v_i}+2}\}$$

Referências

[1] E. Fritscher. Decomposição de espectros de grafos e aplicações, Tese de Doutorado, UFRGS, 2014.

[2] R. Hammack, W. Imrich and S. Klavžar. Handbook of products graphs, second edition *Discrete Mathematics and its Applications*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

[3] P. Lancaster and M. Tismenetsky. The theory of matrices, second edition. *Computer Science and Applied Mathematics*. Academic Press, Orlando, FL, 1985.

[4] B. Souza. Produtos e Coespectralidade de Grafos. Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2016.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0329