

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Escolha ótima dos parâmetros eletromagnéticos para a matriz Hodge Geométrica

Alex S. de Moura¹

Departamento de Economia, UFJF, Governador Valadares, MG

Werley G. Facco²

Coordenadoria de Formação Geral, IFES, São Mateus, ES

Elson J. da Silva³

Departamento de Engenharia Elétrica, UFMG, Belo Horizonte, MG

Rodney R. Saldanha⁴

Departamento de Engenharia Elétrica, UFMG, Belo Horizonte, MG

Resumo. Na aplicação do Cálculo Exterior Discreto para a resolução de problemas eletromagnéticos, é necessário resolver um sistema linear esparso definido pela inserção das leis constitutivas através do operador estrela de Hodge discreto. Ao utilizar uma malha estruturada, pelo menos uma das matrizes de Hodge é diagonal e o esquema torna-se totalmente explícito, uma vez que a inversão da matriz de Hodge que representa as leis constitutivas é trivial. Em geral, as matrizes de Hodge em malhas simpliciais são não-diagonais, definidas positivas, simétricas e esparsas. Neste artigo usa-se as matrizes de Hodge geométricas em malhas não estruturadas e a partir disto realiza-se uma análise da melhor estratégia para a introdução dos parâmetros de materiais em mudanças de meio para se ter uma transição suave entre os meios.

Palavras-chave. Formas diferenciais, mudança de meio, leis constitutivas, Matriz de Hodge.

1 Introdução

O Cálculo Exterior Discreto (CED) das formas diferenciais é uma ferramenta que cria do zero uma teoria discreta com base na geometria diferencial e topologia cujas definições e teoremas imitam suas contrapartidas contínuas.

A natureza geométrica dos modelos geralmente estudados por exemplo no eletromagnetismo são melhor expressadas e esclarecidas através do uso do cálculo exterior das formas diferenciais. Esta geometria baseada no cálculo foi desenvolvida e aperfeiçoada para se tornar a base da geometria diferencial moderna [4].

¹alex.moura@ufjf.edu.br

²werleyfacco@ifes.edu.br

³elson@cpdee.ufmg.br

⁴rodney@cpdee.ufmg.br

O cálculo das formas exteriores permite que as equações diferenciais e integrais sejam expressas em espaços suaves e curvos de uma maneira bem consistente, ao revelar um conjunto de invariantes geométricos. A este conjunto de invariantes geométricos pode-se citar, por exemplo, as operações clássicas com gradientes, divergentes e rotacionais, bem como os teoremas de Green, Gauss e Stokes que podem ser representados de uma maneira concisa em termos das formas diferenciais com a utilização de um único operador denominado derivada exterior, estas observações induzem a uma generalidade desta abordagem, pois, as equações diferenciais podem ser expressas em termos da derivada exterior.

Uma das aplicações desta teoria é a resolução de problemas eletromagnéticos, a discretização das equações de Maxwell através do cálculo exterior das formas diferenciais fornece campos discretos (simplexos), operadores diferenciais discretos (matrizes de incidência) e matrizes de materiais discretos (operadores estrela de Hodge).

Nesta abordagem [2], tem-se que os graus de liberdade associados as diferentes variáveis do problema podem ser armazenadas nos simplexos da malha primal e dual associado ao domínio do problema. O operador estrela de Hodge é usado para levar as informações relativas as propriedades constitutivas do meio entre a malha primal e dual, garantindo assim, a preservação da relações constitutivas. Este operador é essencial para se garantir a estabilidade do método e por isso será o ponto central da discussão deste trabalho.

Em geral, as matrizes de Hodge em malhas simpliciais são não-diagonais, positiva definidas, simétricas e esparsas [8]. Considerando que o inversa deste tipo de matriz é tipicamente cheia, ou seja, a grande maioria de sua entradas é diferente de zero. Para resolver isto, usa-se métodos para obter uma aproximação diagonal das inversas das matrizes de Hodge [6]. Bossavit e Kettunen propuseram uma aproximação que requer que todos os ângulos diedrais sejam agudos [3], mas, observa-se que esta condição não é facilmente obtida na prática e, por vezes, este método faz com que a matriz resultante perca a propriedade de ser positiva definida, conduzindo com isto a uma condição de instabilidade [7].

Um sistema incondicionalmente estável, totalmente explícito e esparsa para malha simplicial é obtida usando uma aproximação esparsa da matriz de Hodge [9]. Nesta abordagem, uma inversa da matriz é obtida pela divisão recursiva da matriz original em blocos. A idéia fundamental é aproximar as inversas das matrizes esparsas durante o processo de inversão. As simulações numéricas mostraram que o método fornece uma matriz inversa aproximada esparsa que garante uma economia computacional e a estabilidade incondicional.

Matrizes de Hodge podem ser construídas apenas com as informações geométricas da malha primal e dual, estas matrizes são denominadas de Hodge geométrica. Observa-se que neste caso, pelo menos uma das matrizes do sistema linear é diagonal o que torna o sistema totalmente explícito e conduz a uma economia computacional. A idéia deste artigo é discutir esta construção e estabelecer um critério ótimo para a inserção das informações dos parâmetros magnéticos constitutivos ao se considerar meios heterogêneos, ou seja, deseja-se estabelecer um melhor critério para que se tenha uma mudança de meio suave no estudo dos problemas eletromagnéticos.

2 Operador estrela de Hodge

O operador estrela de Hodge será definido como um isomorfismo entre p -formas e $(n - p)$ -formas, onde n é a dimensão do espaço.

$$\begin{aligned} \star : \bigwedge^p &\mapsto \bigwedge^{n-p} \\ \star(\omega^p) &= \omega^{n-p} \end{aligned} \tag{1}$$

Através de um produto interno \langle, \rangle induzido por uma métrica, pode-se definir o operador estrela de Hodge da seguinte maneira:

$$\alpha \wedge \star\beta = \langle\alpha, \beta\rangle \mu^n \tag{2}$$

para qualquer par de $(n - p)$ -formas onde μ^n é o volume induzido pela métrica.

Usando então (2) é possível obter as relações constitutivas das equações de Maxwell na linguagem das formas diferenciais descritas da seguinte maneira,

$$\mathcal{D} = \star_\epsilon \mathcal{E} \tag{3}$$

$$\mathcal{B} = \star_\mu \mathcal{H} \tag{4}$$

$$\mathcal{J} = \star_\sigma \mathcal{E} \tag{5}$$

Na discretização o uso das malhas primal e dual relacionadas ao domínio são estritamente necessárias quando os graus de liberdade possuem uma dualidade geométrica natural, como por exemplo as leis constitutivas.

A matriz de Hodge serve como o operador discreto que faz o mapeamento entre a malha primal e dual e garante a preservação das relações constitutivas entre os campos. Neste artigo, usaremos o operador discreto denominado, Hodge geométrico. Temos que esta matriz é diagonal e torna o sistema associado totalmente explícito.

2.1 Matriz Hodge geométrica

A definição da matriz de Hodge geométrica parte da relação entre as arestas primais e duais de uma malha bidimensional. Defini-se então esta matriz por:

$$[\mathbf{M}^d(\alpha)]_{i,i} = \alpha |s_i^*| / |s_i| \tag{6}$$

onde α denota um campo escalar, por exemplo, ϵ (permissividade), ν (reluctividade), σ (condutividade), e s_i, s_i^* são o i -ésimo simplexo primal e a i -ésima célula dual, respectivamente. Tem-se que as entradas fora da diagonal são nulas por definição.

Figura 1 mostra as malhas primal e dual em um domínio bi-dimensional, e as arestas primais e duais, estas arestas são definidas como 1-simplexos, observamos também dois domínios Ω_1 e Ω_2 com diferentes características eletromagnéticas.

Usando o delta de Kronecker, a construção da matriz pode ser escrita na forma geral

$$[\mathbf{M}^d(\alpha)]_{ij} = \alpha |s_i^*| / |s_j| \delta_{ij} \tag{7}$$

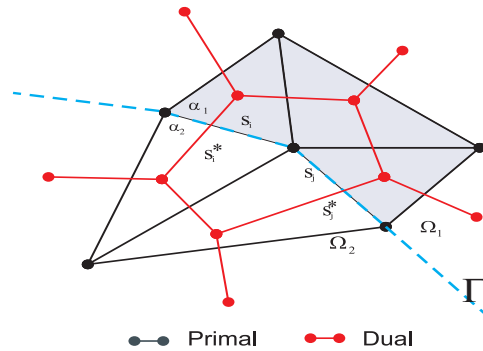


Figura 1: Malhas primal e dial em um domínio bi-dimensional.

Esta definição é apropriada na teoria quando a malha dual é criada tomando-se os circuncentros dos simplexos primais, produzindo assim malhas ortogonais. Na prática, entretanto, é freqüentemente usado baricentros para construir a malha dual, pois isso, garante que s_i interseparará s_i^* dentro do domínio.

Na equação 7 nós temos que impor um valor para o campo escalar α relacionado ao meio onde as arestas estão localizadas. Na figura 1 a aresta primal s_i está localizada sobre a fronteira Γ dos dois meios Ω_1 e Ω_2 .

Quando trata-se problemas com mudança de meio a grande questão é saber qual o melhor valor de α na equação (7), calculado em função de α_1 e α_2 , isto é, $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$ que será usado para se garantir uma continuidade na mudança de meio. Na próxima seção apresenta-se algumas estratégia para o cálculo de α e através de simulações numéricas define-se uma escolha ótima.

2.2 Cálculo de $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$

Como a matriz de Hodge aqui apresentada tem uma essência totalmente geométrica, apresenta-se aqui quatro maneiras, baseadas em médias, para a obtenção do valor ótimo $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$. Utiliza-se a média aritmética α^a , geométrica α^g , harmônica α^h e uma média ponderada α^w , onde se considera como peso as áreas dos triângulos que contém a aresta primal.

Seja $s_i \in \Gamma$ fronteira dos meios Ω_1 e Ω_2 , com campos escalares α_1 e α_2 , respectivamente. Tem-se que:

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha^a = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \tag{8}$$

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha^g = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \tag{9}$$

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha^h = \frac{2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} \tag{10}$$

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha^w = \frac{A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2}{A_1 + A_2} \tag{11}$$

onde A_1 and A_2 são as áreas dos triângulos que contém a aresta primal s_j .

3 Resultados Numéricos

Para investigar a performance de α^a , α^g , α^h e α^w será simulado um problema magnetostático. Considere que temos um meio isotrópico e por simplicidade iremos negligenciar variações temporais. As equações do eletromagnetismo na linguagem do cálculo exterior discreto são apresentadas a seguir:

$$d\mathcal{B} = 0 \tag{12}$$

$$d\mathcal{H} = \mathcal{J} \tag{13}$$

$$\mathcal{H} = \star_{1/\mu}\mathcal{B} \tag{14}$$

onde \mathcal{B} , \mathcal{H} e \mathcal{J} são o fluxo magnético, o campo magnético e a densidade elétrica de carga, respectivamente, e μ é a permeabilidade magnética. Observa-se por (12) que \mathcal{B} é uma 1-forma fechada [2], então, existe uma 0-forma \mathcal{A} tal que,

$$\mathcal{B} = d\mathcal{A} \tag{15}$$

A 0-forma \mathcal{A} é o potencial vetor magnético e d é o operador derivada exterior [1]. Usando Eq.(13)-(15), pode-se reescrever este problema em função do potencial vetor magnético.

$$d\star_{1/\mu}d\mathcal{A} = \mathcal{J} \tag{16}$$

A representação discreta para a equação de Poisson (16) obtida através do CED é:

$$\mathbf{G}'\mathbf{M}_1(1/\mu)\mathbf{G}\mathbf{a} = \mathbf{j} \tag{17}$$

onde \mathbf{a} and \mathbf{j} são vetores graus de liberdade que representam o vetor potencial magnético nos nós da malha primal e a densidade de corrente sobre as faces da malha dual, respectivamente.

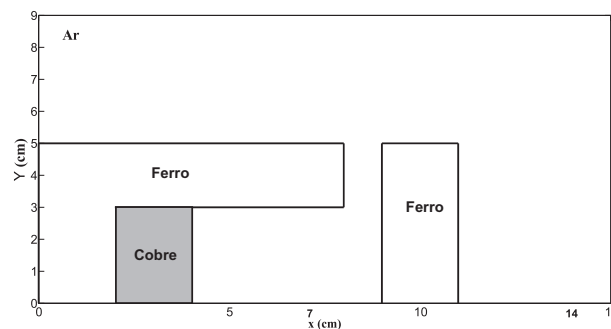


Figura 2: Geometria do problema magnetostático (eletroímã).

A geometria do problema pode ser vista na Figura 2. Neste problema as relutividade magnética ($\nu = 1/\mu$) utilizadas são, $\nu_{ar} = \nu_{cobre} = 1$ e $\nu_{ferro} = 10^{-3}$ e a densidade de corrente é $J = 0.1MA/m^2$.

Será comparado o desempenho de α^a , α^g , α^h e α^w através da norma do erro dada a seguir:

$$E_r = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} (V_h - V_a)^2}}{\sqrt{\int_{\Omega} V_a^2}} \quad (18)$$

onde V_h é a solução obtida pela aproximação via cálculo exterior discreto V_A é a solução obtida pelo método dos elementos finitos com um total de 10^6 nós na malha, o que garante que a solução convirja para a solução real do problema.

Simula-se o problema utilizando diversas malhas cujo comprimento das arestas tendem a zero, ou seja, refina-se a malha de maneira a se obter uma convergência da solução para a solução obtida pelo método dos elementos finitos.

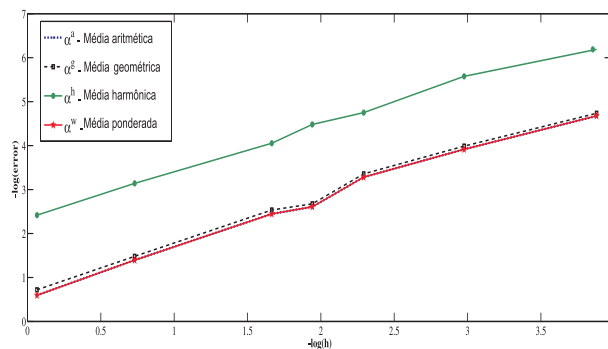


Figura 3: Norma do Erro Cálculo exterior discreto com o uso dos parâmetros α^a , α^g , α^w e α^h . h é o comprimento da menor aresta da malha primal.

Figura 3 mostra que α^a e α^w tem desempenho similar. Tem-se que α^a e α^w consideram que na mudança de meios usa-se a média aritmética e ponderada das relatividades magnéticas. Nota-se que mesmo considerando a área como um peso os desempenho destas duas medidas são similares.

Observa-se que o desempenho do método tem uma leve melhora quando consideramos o parâmetro α^g , no qual utiliza-se a média geométrica das relatividades magnéticas associadas as arestas sobre a fronteira.

O que chama a atenção é o desempenho do método com α^h , percebe-se que a média harmônica é muito superior em desempenho em relação as outras três.

4 Conclusões

Neste artigo, apresenta-se a matriz de Hodge geométrica considerando a inserção dos parâmetros constitutivos através de quatro maneiras distintas. Utilizou-se pela natureza geométrica da matriz a média aritmética, geométrica, harmônica e ponderada cujos pesos são as áreas dos triângulos associados as arestas primais. Simulou-se um problema magnetostático para analisar qual é a melhor estratégia das quatro propostas para a inserção dos parâmetros constitutivos.

Observa-se que a solução do problema com a matriz de Hodge geométrica construída com o uso dos parâmetros calculados via média harmônica é bem melhor do que com a utilização dos demais parâmetros.

Agradecimentos

Esse trabalho possui suporte em parte pela FAPES, FAPEMIG, CNPq e CAPES.

Referências

- [1] L. Bernard, R. Torrado, and L. Pichon, "Efficient implementation of the UPML the generalized finite-difference time-domain method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 3492-3495, Aug. 2010.
- [2] A. Bossavit, "Computational Electromagnetism: variational formulation, complementarity, edge elements", Academic Press, San Diego, 1994.
- [3] A. Bossavit and L. Kettunen, "Yee-like schemes on a tetrahedral mesh, with diagonal lumping," *Int. J. Num. Model.: Electron. Netw., Dev. Fields*, vol. 12, no. 1-2, pp. 129-142, 1999.
- [4] É. Cartan, *Les Systèmes Differentiels Exterieurs et leurs Applications Géometriques*, 1945, Hermann, Paris.
- [5] M. Desbrun, A. N. Hirani, M. Leok, and J. E. Marsden. "Discrete Exterior Calculus", arXiv:math/0508341, 2005.
- [6] A. Fisher, R. Rieben, G. Rodrigue, and D. White, "A generalized mass lumping technique for vector finite-element solutions of the time-dependent Maxwell equations," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 53, no. 9, pp. 2900-2910, Sep. 2005.
L. Bernard, R. Torrado, and L. Pichon, "Efficient implementation of the UPML the generalized finite-difference time-domain method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 3492-3495, Aug. 2010.
- [7] J. Keranen, J. Kangas, A. Ahola, and L. Kettunen, "Implicit Yee-like scheme on tetrahedral mesh," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no. 2, pp. 717-720, Mar. 2002.
- [8] J.F. Lee, R. Lee, and A. Cangellaris, "Time-domain finite-element methods," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 45, no. 3, pp. 430-442, Mar. 1997.
- [9] Moura, A. S. and Saldanha, R. R. and Silva, E. J. and Lisboa, A. C. and Facco, W. G. and Facco, N. Z., "A Recursive Sparsification of the Inverse Hodge Matrix", *Magnetics, IEEE Transactions on* vol 48, pp 611-614, 2012.