

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aproximações de alta ordem para a equação da onda unidimensional

Juliano D. B. Santos¹

Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC, Petrópolis, RJ

Abimael F. D. Loula²

Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC, Petrópolis, RJ

Resumo. Um método de diferenças finitas é aplicado à equação da onda no domínio do tempo a uma dimensão espacial. Neste trabalho propomos aproximações por diferenças finitas via bases polinomiais características, as quais são comparadas com as aproximações clássicas via polinômios canônicos. Os resultados são ilustrados pelas taxas de convergência obtidas.

Palavras-chave. Diferenças Finitas, Equação da onda, Alta ordem.

1 Geração de stencil de diferenças finitas

O processo de obtenção da aproximação por diferenças finitas explorado a seguir é baseado na metodologia apresentada em [1], [2].

Seja Ω um domínio aberto limitado em \mathbb{R}^2 . Um problema de valor de contorno qualquer, na sua forma forte, pode ser dado em termos de operadores diferenciais

Encontrar as variável de campo $\mathbf{u}(\mathbf{x}): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \forall \mathbf{x} \in \Omega$, tal que

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \quad (1)$$

com as condições de contorno dadas por:

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) = \bar{\mathbf{g}} \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (2)$$

onde \mathbf{f} é um termo fonte definido no domínio Ω e $\bar{\mathbf{g}}$ é a condição de contorno prescrita sobre todo o contorno Γ . Os operadores \mathcal{L} e \mathcal{B} , por seu turno, denotam um sistema de equações diferenciais parciais no domínio Ω e no contorno Γ , respectivamente. A aproximação das equações 1 e 2 em diferenças finitas pode ser descrita dentro metodologia de tal forma que seja independente do número de pontos usados no stencil. A seguir apresentamos resumidamente esta estratégia.

¹juliano@lncc.br

²aloc@lncc.br

Seja X um conjunto finito tal que $|X|$ denote seu número de elementos e $\mathcal{N} = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{|\mathcal{N}|-1}\} \subset \Omega \cup \Gamma$ um conjunto de pontos indexados, também chamados de nós, onde a aproximação da solução seja factível. Além disso, para cada $i \in \{0, \dots, |\mathcal{N}| - 1\}$, será associado o conjunto $\mathcal{A}_i \subset \{0, \dots, |\mathcal{N}| - 1\}$, que contém os pontos adjacentes a x_i . Deste modo, se $j \in \mathcal{A}_i$, teremos que x_j será adjacente a x_i , de modo que para as operações que serão feitas será o bastante admitirmos que $i \in \mathcal{A}_i$, para todo $i \in \{0, \dots, |\mathcal{N}| - 1\}$.

Considerando que a equação 1 é uma equação diferencial parcial de uma variável escalar $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, sua aproximação clássica em diferenças finitas sobre um ponto $x_i \in \mathcal{I}$ deve atender à seguinte relação [1], [2]

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}_i) \cong \sum_{j \in \mathcal{A}_i} c_j u(\mathbf{x}_j), \tag{3}$$

com os coeficientes c_j , com $j \in \mathcal{A}_i$, calculados de forma que o valor do operador \mathcal{L} sobre a variável u no ponto \mathbf{x}_i seja dado como combinação linear dos valores da função u avaliados nos pontos \mathbf{x}_j pertencentes a uma vizinhança \mathcal{A}_i de \mathbf{x}_i .

Para o cálculo dos coeficientes c_j do stencil de diferenças finitas em \mathbf{x}_i em 3 iremos substituir a variável u por m funções bases do conjunto \mathbb{B}_i seguinte

$$\mathbb{B}_i := \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}, \tag{4}$$

avaliadas no ponto \mathbf{x}_i e obtemos, para cada φ_l , $l = 1, \dots, m$, uma equação,

$$\sum_{j \in \mathcal{A}_i} c_j \varphi_l(\mathbf{x}_j) = \mathcal{L}\varphi_l(\mathbf{x}_i), \tag{5}$$

a qual é avaliada no ponto i , resultando em um sistema de m equações algébricas lineares e $|\mathcal{A}_i|$ incógnitas c_j . Na forma matricial, sendo $m = |\mathcal{A}_i|$, tal sistema é dado por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} & \dots & \kappa_{1m} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} & \dots & \kappa_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_{m1} & \kappa_{m2} & \kappa_{m3} & \dots & \kappa_{mm} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}}_C = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}}_F \tag{6}$$

sendo que \mathbf{K} é a matriz de entradas $\kappa_{lj} = \varphi_l(\mathbf{x}_j)$, $j, l = 1 \dots m$, C o vetor de incógnitas e F o vetor de termo fonte com componentes $f_l = \mathcal{L}\varphi_l(\mathbf{x}_i)$.

2 Aproximação da equação da onda 1D

Aproximações por diferenças finitas serão feitas sobre stencils compactos e não compactos de segunda ordem no tempo e diferentes ordens no espaço para a equação da onda acústica unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{7}$$

sendo $u = u(x, t)$ um campo de pressão definido em $\Omega = [0, L] \times [0, T]$ e c a velocidade da onda.

Iremos adaptar a metodologia apresentada na seção anterior para o domínio espaço \times tempo $\Omega := [0, L] \times [0, T]$. Com efeito, $[0, L]$ é discretizado em $M + 1$ partes equidistantes de modo que

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, M \tag{8}$$

com $h = L/M$. o domínio temporal $[0, T]$ é também discretizado uniformemente em

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N \tag{9}$$

com $\Delta t = T/N$.

Uma aproximação para a solução $u(x, t)$ no nó j e instante n será denotada por

$$U_j^n \approx u(x_j, t_n). \tag{10}$$

As aproximações por diferenças finitas apresentadas neste capítulo serão obtidas usando a metodologia descrita na Seção (1) adotando-se funções polinomiais em x e t sobre stencils de 5, 7 e nove pontos correspondentes a aproximações de segunda, quarta e sexta ordens no espaço, respectivamente conforme ilustra a figura 1.

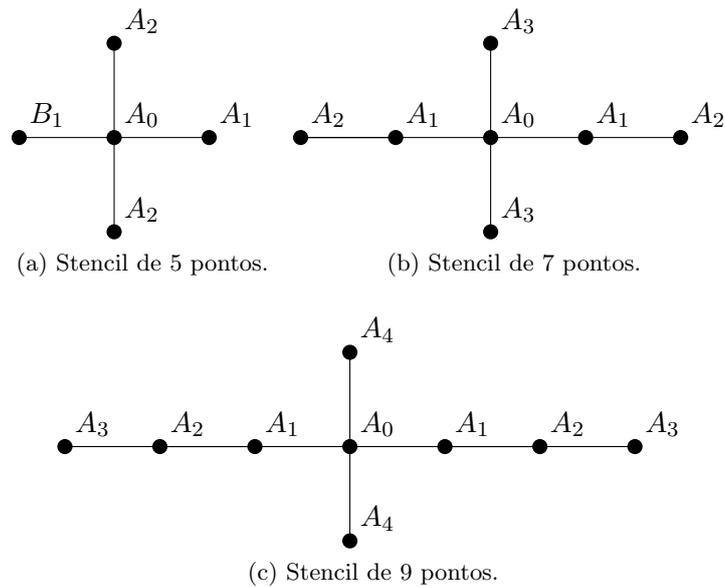


Figura 1: Representação de stencils de diferentes ordens.

As aproximações clássicas de diferenças finitas serão dadas pelo emprego dos polinômios canônicos que constituem as bases

$$\mathbb{B}_1 := \{1, t, t^2, x, x^2\}, \quad \mathbb{B}_2 := \{1, t, t^2, x, x^2, x^4, x^5\} \text{ e } \mathbb{B}_3 := \{1, t, t^2, x, x^2, x^4, x^5, x^6, x^7\},$$

empregadas no sistema de equações 5 da metodologia apresentada na Seção 1.

A solução geral da equação da onda homogênea 7 a uma dimensão espacial é dada por [3]

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct), \quad (11)$$

onde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ são arbitrárias sendo $(x+ct)$ e $(x-ct)$ as curvas características associadas a este problema. Neste trabalho propomos novas aproximações em os conjuntos \mathbb{C}_j sejam formados por polinômios característicos, escritos em termos das curvas características, ou seja, os conjuntos base serão os seguintes

$$\mathbb{C}_1 := \{1, (x-ct), (x+ct), x^2, (x+ct)^2\}, \quad \mathbb{C}_2 := \{1, (x-ct), (x+ct), x^2, (x+ct)^2, (x-ct)^3, (x+ct)^4\}, \quad (12)$$

e

$$\mathbb{C}_3 := \{1, (x - ct), (x + ct), x^2, (x + ct)^2, (x - ct)^3, (x + ct)^4, (x - ct)^5, (x + ct)^6\}. \quad (13)$$

Empregando-se as bases \mathbb{C}_1 , \mathbb{C}_2 e \mathbb{C}_3 obtemos nessa ordem para os stencils de 5, 7 e nove pontos os coeficientes

$$A_0 := 1 - \mu^2, \quad A_1 := \mu^2, \quad A_2 := 1; \quad (14)$$

$$A_0 := -\frac{\mu^4}{2} + \frac{5}{2}\mu^2 - 2, \quad A_1 := \frac{\mu^4 - 4\mu^2}{3}\mu^2, \quad A_2 := -\frac{\mu^4 - \mu^2}{12}, \quad A_3 := 1; \quad (15)$$

e

$$A_0 := \frac{\mu^6 + 49\mu^2}{18} - \frac{7}{9}\mu^4 - 2, \quad A_1 := -\frac{\mu^6 - 13\mu^4 + 36\mu^2}{24}, \quad A_2 := \frac{\mu^6 - 10\mu^4 + 9\mu^2}{60}, \quad (16)$$

$$A_3 := -\frac{\mu^6 - 5\mu^4 + 4\mu^2}{360}, \quad A_4 := 1.$$

sendo $\mu = \Delta t/ch$.

3 Ordem de convergência

A Tabela (1) apresenta a ordem de convergência obtida para cada stencil apresentado anteriormente, por meio do erro de truncamento em cada caso para bases polinomiais canônicas. Tendo em vista que o estudo se pauta em malhas cartesianas ortogonais, é usual tomar o passo no tempo tendo com a mesma ordem do passo no espaço, ou seja, $\Delta t = \mathbf{O}(h)$. Por essa abordagem clássica segue para todos os stencils estudados não houve ganho de ordem de convergência espacial, donde a taxas de segunda ordem foram obtidas.

Stencil	Convergência espaço/tempo	Convergência para $\Delta t = O(h)$
5 pontos	$O(\Delta t^2, h^2)$	$O(h^2)$
7 pontos	$O(\Delta t^2, h^4)$	$O(h^2)$
9 pontos	$O(\Delta t^2, h^6)$	$O(h^2)$

Tabela 1: Ordens de convergência obtidas para os stencils de 5, 7 e 9 pontos, obtidos por bases polinomiais compostas por polinômios canônicos. A última coluna fazendo $\Delta t = O(h)$.

A Tabela (2) apresenta os resultados obtidos para as ordens de aproximação de cada um destes stencils gerados por polinômios característicos. Para o stencil de sete pontos a aproximação obtida foi da ordem $O(h^2 \cdot \Delta t^2, h^4)$. Portanto, para $\Delta t = O(h)$ este stencil gera uma aproximação de quarta ordem, diferentemente do stencil de sete pontos obtido classicamente que é de segunda ordem. O stencil de nove pontos, por seu turno, obteve um ganho de convergência ainda mais expressivo. De fato, a ordem de convergência no espaço tempo foi de $O(h^4 \cdot \Delta t^2, h^6)$ de modo que para o passo no tempo da mesma ordem que o passo especial o método atingiu $O(h^6)$.

Stencil	Convergência espaço/tempo	Convergência para $\Delta t = O(h)$
5 pontos	$O(\Delta t^2, h^2)$	$O(h^2)$
7 pontos	$O(\Delta t^2 \cdot h^2, h^4)$	$O(h^4)$
9 pontos	$O(\Delta t^2 \cdot h^4, h^6)$	$O(h^6)$

Tabela 2: Ordens de convergência obtidas para os stencils de 5, 7 e 9 pontos, obtidos por bases polinomiais compostas por polinômios característicos. A última coluna fazendo $\Delta t = O(h)$.

4 Estabilidade espectral pelo Método de von Neumann

Para a análise da estabilidade das aproximações o método de von Neumann [4]. A análise para o caso de um stencil de nove pontos ainda não foi concluída, vem se mostrando de natureza mais complexa que as demais devido a quantidade de termos envolvidos. A mesma ainda se encontra em andamento. A Tabela (3) apresenta um resumo das condições de estabilidade para os stencils de 5 e 7 pontos com coeficientes obtidos classicamente e via polinômios característicos.

Stencil	Estabilidade para base canônica	Estabilidade para base de caracteísticas
5 pontos	$\mu \leq 1$	$\mu \leq 1$
7 pontos	$\mu \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mu \leq 1$

Tabela 3: Tabela com as condições de estabilidade descritas para stencils de 5 e sete pontos.

Como podemos observar, as condições de estabilidade para as novas aproximações são menos restritivas que as condições dos métodos clássicos.

5 Aproximações sobre stencils compactos

Nesta seção será gerada uma aproximação onde os cálculos dos coeficientes serão feitos sobre malhas compostas por stencils compactos uniformes de nove pontos interiores.

Considerando-se uma malha periódica de elementos quadrados, os stencils de pontos interiores serão dados como na Figura (2) e caracterizados pelos coeficientes A_0 , A_1 , e A_2 , estes obtidos por meio do emprego da base polinomial canônica ou da base de características e da resolução implícita do seguinte sistema de equações lineares associado.

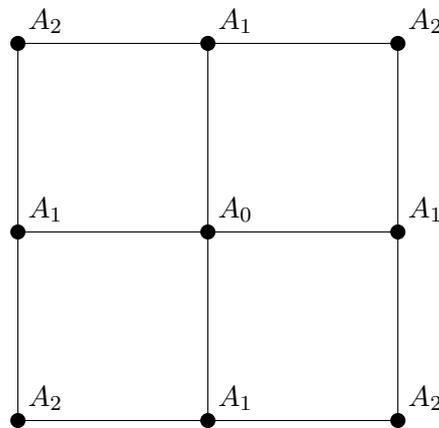


Figura 2: Exemplo de stencil compacto de nove nós interiores de uma malha retangular uniforme.

Testando-se a aproximação por meio da base polinomial canônica completa

$$\mathbb{B}_{3 \times 3} = \{1, x, t, xt, x^2, t^2, x^2t, xt^2, x^2t^2\} \tag{17}$$

foram obtidos os mesmos coeficientes do stencil de cinco pontos clássico.

Procedendo-se agora com o emprego da base de polinômios característicos

$$\mathbb{C}_{3 \times 3} = \{1, (x - ct), (x + ct), (x - ct)^2, (x)^2, (x - ct)^3, (x + ct)^3, (x - ct)^4, (x + ct)^4\} \tag{18}$$

os seguintes coeficientes caracterizaram a aproximação

$$A_0 = \frac{5\mu^2 - 5}{3}, \quad A_1 = -\frac{5\mu^2 + 1}{6}, \quad A_2 = -\frac{\mu^2 - 1}{12},$$

sendo um método de quarta ordem no espaço e no tempo e nodalmente exato para $\Delta t = h/c$. Além disso, a análise de estabilidade para este stencil conduziu à seguinte relação $\Delta t \leq h/c$ para que o método seja estável.

6 Conclusões

Neste trabalho apresentamos uma estratégia de diferenças finitas para a obtenção de novos coeficientes para stencils compactos e não compactos para a equação da onda unidimensional. As condições de estabilidade para as aproximações propostas se mostram menos restritivas se comparadas com os esquemas clássicos. Nossa abordagem apresentou ganhos significativos de ordem de convergência se comparados com os esquemas clássicos.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece ao Prof. Abimael pela orientação e, também, ao programa de recursos humanos PRH da ANP pelo financiamento do mestrado.

Referências

- [1] J. D. B. Santos. *Métodos de diferenças finitas de alta ordem para a equação da onda*. Tese de mestrado, LNCC, 2016.
- [2] J. D. B. Santos and A. F. D. Loula. Métodos de diferenças finitas de alta ordem para o problema de Helmholtz. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia- RIPE*, 2016.
- [3] D. G. de Figueiredo. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Instituto de matemática pura e aplicada, 1 edition, 1977.
- [4] V.S. Ryaben'kii and S.V. Tsynkov. *A Theoretical Introduction to Numerical Analysis*. Taylor & Francis, 2006.