

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Modelos de dinâmica populacional para processos fuzzy autocorrelacionados

Laécio Carvalho de Barros¹

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, SP
Francielle Santo Pedro²

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, SP
Estevão Esmi³

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. Via de regra um modelo de dinâmica populacional envolve estudo da variação na quantidade de indivíduos de uma determinada população. As soluções desses sistemas são processos temporais, com ou sem memória, i.e., o presente está correlacionado ou não com o futuro. No nosso caso, propomos modelos de dinâmica populacional que são descritos por processos fuzzy autocorrelacionados, ou seja, apresentam interatividades locais modelada por meio da teoria de conjuntos fuzzy. Nesse sentido, veremos que em um problema de valor inicial com incerteza, saber que o campo é negativo não é suficiente para obter uma solução decrescente. Além disso, é preciso adotar certo controle na taxa de variação e é isso que faremos neste trabalho.

Palavras-chave. Dinâmica Populacional, interatividade, processos fuzzy autocorrelacionados.

1 Preliminares

Neste trabalho iremos considerar processos autocorrelacionados em que a correlação é dada a partir da teoria de conjuntos fuzzy. Assim é necessário enunciarmos alguns conceitos preliminares.

Definição 1.1. *Um número fuzzy A é um subconjunto fuzzy de \mathbb{R} com função de pertinência semi-contínua superiormente, fuzzy convexa e normal $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, e com suporte compacto.*

Definição 1.2. *[1, 5] Os α -níveis de A são dados por $[A]_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \alpha\}$, se $\alpha \in (0, 1]$ e $[A]_0 = cl\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\} = \overline{suppA}$. Quando $\alpha = 1$ dizemos $[A]_1$ é o núcleo de A .*

Note que $[A]_\alpha$ são intervalos fechados $[a_\alpha^-, a_\alpha^+]$.

¹laeciocb@ime.unicamp.br

²fran.stopedro@gmail.com

³eelaureano@ime.unicamp.br

Teorema 1.1. [8] *Seja uma família de intervalos não vazios $[a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $0 < \alpha \leq 1$. Se*

i. $[a_\alpha^-, a_\alpha^+] \supset [a_\beta^-, a_\beta^+]$, para $0 < \alpha \leq \beta$

ii. $[\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\alpha_k}^-, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{\alpha_k}^+] = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$

sempre que (α_k) é uma sequência não-decrescente convergindo para $\alpha \in (0, 1]$, então a família $[a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $0 < \alpha \leq 1$ representa os conjuntos de α -níveis do número fuzzy A . Reciprocamente, se $[a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $0 < \alpha \leq 1$ são os conjuntos de α -níveis do número fuzzy A então as condições (i) – (ii) são válidas.

Denotamos a família de números fuzzy por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, número fuzzy triangular A pela tripla $A = (a; b; c)$ e neste caso $[A]_\alpha = [a + (b - a)\alpha, c + (b - c)\alpha]$.

Uma distribuição de possibilidade conjunta J , n -dimensional, é um subconjunto fuzzy de \mathbb{R}^n com uma função de pertinência normal e suporte compacto. A interatividade entre dois números fuzzy é determinada a partir de uma distribuição de possibilidade [3].

A métrica usada neste manuscrito é a distância de Pompeiu-Hausdorff $d_\infty : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, e é definida pela equação

$$d_\infty(A, B) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max \{|a_\alpha^- - b_\alpha^-|, |a_\alpha^+ - b_\alpha^+|\},$$

sendo $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ e $[B]_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$ [1].

Com o intuito de não precisarmos conhecer a distribuição de possibilidade conjunta de fato, Barros et al. [2], introduziram o conceito de números fuzzy linearmente correlacionados, cuja definição é dada a seguir.

Definição 1.3. [2, 9] *Dois números fuzzy A e B são ditos linearmente correlacionados quando existem $q, r \in \mathbb{R}$ tais que, em níveis, obtemos $[B]_\alpha = q[A]_\alpha + r \forall \alpha \in [0, 1]$.*

Proposição 1.1. [9] *As quatro operações aritméticas entre números fuzzy linearmente correlacionados são dadas, em níveis, por*

- $[B +_L A]_\alpha = (1 + q)[A]_\alpha + r, \forall \alpha \in [0, 1]$.
- $[B -_L A]_\alpha = (q - 1)[A]_\alpha + r, \forall \alpha \in [0, 1]$.
- $[B \cdot_L A]_\alpha = \{qx_1^2 + rx_1 \in \mathbb{R} | x_1 \in [A]_\alpha\}, \forall \alpha \in [0, 1]$.
- $[B \div_L A]_\alpha = \{q + \frac{r}{x_1} \in \mathbb{R} | x_1 \in [A]_\alpha\}, 0 \notin \text{supp}A \text{ e } \forall \alpha \in [0, 1]$.

Os processos fuzzy aos quais nos referimos neste estudo são funções fuzzy do tipo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, isto é, funções que a cada número real associam um número fuzzy. Além disso, esses processos são autocorrelacionados, ou seja, para todo h com valor absoluto suficientemente pequeno, $[F(t + h)]_\alpha = q(h)[F(t)]_\alpha + r(h)$. Em outras palavras, estamos considerando que o “presente” está linearmente correlacionado com o “futuro”.

As funções $F_\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{K}_C$ são definidas por $F_\alpha(t) = [F(t)]_\alpha$, sendo \mathcal{K}_C a família de intervalos compactos de \mathbb{R} . Isto é, $[F(t)]_\alpha = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$.

Definição 1.4. [2] Seja $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um processo fuzzy e para cada h com valor absoluto suficientemente pequeno, sejam $F(t_0 + h)$ e $F(t_0)$ com $t_0 \in [a, b]$ números fuzzy linearmente correlacionados. A função F é dita ser L -diferenciável em t_0 se existe um número fuzzy $F'_L(t_0)$ tal que o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + h) -_L F(t_0)}{h} \tag{1}$$

existe e é igual a $F'_L(t_0)$, na métrica d_{∞} . Adicionalmente, $F'_L(t_0)$ é chamada derivada fuzzy linearmente correlacionada de F em t_0 .

Teorema 1.2. [2] Seja $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ L -diferenciável em t_0 e $[F(t_0)]_{\alpha} = [f_{\alpha}^{-}(t_0), f_{\alpha}^{+}(t_0)]$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Então f_{α}^{-} e f_{α}^{+} são diferenciáveis em t_0 e para todo h com valor absoluto suficientemente pequeno, temos

$$[F'_L(t_0)]_{\alpha} = \begin{cases} [(f_{\alpha}^{-})'(t_0), (f_{\alpha}^{+})'(t_0)] & \text{se } q(h) \geq 1 \\ [(f_{\alpha}^{+})'(t_0), (f_{\alpha}^{-})'(t_0)] & \text{se } 0 < q(h) < 1 \\ [(f_{\alpha}^{-})', (f_{\alpha}^{-})'] & \text{se } q(h) \leq 0 \end{cases} \tag{2}$$

sendo $F'_L(t_0)$ a L -derivada de F em t_0 .

A seguir, vamos enunciar a primeira derivada utilizada para processos fuzzy e faremos algumas comparações com a L -derivada.

Definição 1.5. [7] A função $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é Hukuhara diferenciável (H -diferenciável) em t_0 se os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + h) -_H F(t_0)}{h} \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0) -_H F(t_0 - h)}{h}$$

existem e são iguais a algum elemento $F'_H(t_0)$ que pertence a $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. $F'_H(t_0)$ é chamado de H -derivada de F em t_0 .

Essa derivada possui diâmetro crescente em t , isto é, sua fuzziness aumenta com o tempo e $F'_H(t_0) = F'_L(t_0)$ se $q(h) > 1$ (ver [6, 9]).

Na próxima seção apresentamos algumas aplicações em dinâmica de população considerando interatividade.

2 Dinâmica Populacional

• **Malthus:** No modelo de decaimento populacional, temos que a população decai exponencialmente conforme o tempo passa. Assim, considerando a condição inicial fuzzy, obtemos o seguinte problema de valor inicial fuzzy

$$x' = -\lambda x, \quad x_0 = x(0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \tag{3}$$

sendo $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ a condição inicial e $\lambda \in \mathbb{R}_{\perp}^*$ a taxa de decrescimento intrínseca da população.

Em (3), esperamos que a solução tenda a para zero não importando qual é a incerteza em relação a condição inicial. Dessa forma, admitindo que a solução é um processo fuzzy linearmente correlacionado e optando por $0 < q < 1$ na L -derivada, temos que o modelo (3), $\forall \alpha \in [0, 1]$, se torna

$$\begin{cases} [(x_{\alpha}^{+}(t))', (x_{\alpha}^{-}(t))'] &= [-\lambda x_{\alpha}^{+}(t), -\lambda x_{\alpha}^{-}(t)] \\ [x_0]_{\alpha} = [x(0)]_{\alpha} &= [x_{0\alpha}^{-}, x_{0\alpha}^{+}] \end{cases} \quad (4)$$

cuja solução é dada por $[x(t)]_{\alpha} = [x_{0\alpha}^{+}e^{-\lambda t}, x_{0\alpha}^{-}e^{-\lambda t}]$.

Portanto, independente da incerteza na condição inicial, a solução sempre tende a zero com fuzziness decrescente, em outras palavras, temos que a distância entre os limites da incerteza tende a zero. Na Figura 1, vemos as curvas de 0-nível e 1-nível e na Figura 2, podemos ver a representação gráfica da solução fuzzy $x(t)$.

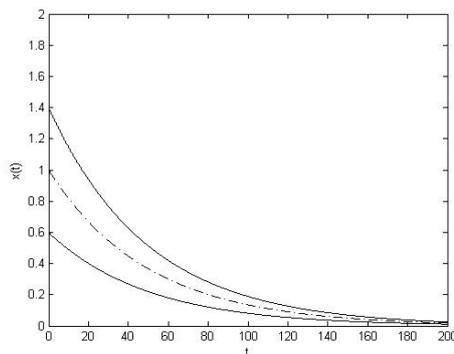


Figura 1: O 0-nível (curva contínua) e o núcleo (curva traço-ponto) da solução x do sistema (4) com $\lambda = 0.2$ e condição inicial $x_0 = (0.6; 1; 1.4)$.

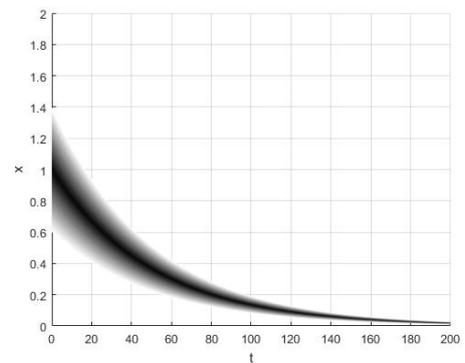


Figura 2: Representação gráfica da solução x do sistema (3) com $\lambda = 0.2$ e condição inicial $x_0 = (0.6; 1; 1.4)$. A região mais escura está representando o 1-nível de $x(t)$.

Por outro lado, se utilizamos a derivada de Hukuhara (que equivale a $q > 1$ no Teorema 1.2) no problema de decaimento populacional temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} [(x_{\alpha}^{-}(t))', (x_{\alpha}^{+}(t))'] &= [-\lambda x_{\alpha}^{+}(t), -\lambda x_{\alpha}^{-}(t)] \\ [x_0]_{\alpha} = [x(0)]_{\alpha} &= [x_{0\alpha}^{-}, x_{0\alpha}^{+}] \end{cases} \quad (5)$$

cuja solução é

$$x_{\alpha}^{-}(t) = c_{\alpha}^{-}e^{\lambda t} + c_{\alpha}^{+}e^{-\lambda t} \text{ e } x_{\alpha}^{+}(t) = -c_{\alpha}^{-}e^{\lambda t} + c_{\alpha}^{+}e^{-\lambda t}$$

com $c_{\alpha}^{-} = \frac{x_{\alpha}^{-}(t_0) - x_{\alpha}^{+}(t_0)}{2}$ e $c_{\alpha}^{+} = \frac{x_{\alpha}^{-}(t_0) + x_{\alpha}^{+}(t_0)}{2}$.

Esse é o modelo típico de decaimento. No entanto, como previsto pela derivada de Hukuhara e corroborado pelas Figuras 3 e 4, o diâmetro da solução é crescente com o tempo. Assim, fica claro que a derivada de Hukuhara não é a ferramenta apropriada para modelar dinâmica de decaimento que apresente incerteza.

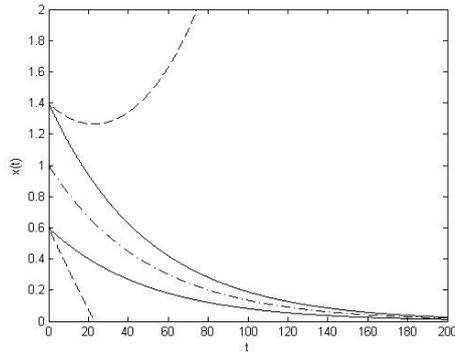


Figura 3: Soluções do modelo de decaimento (3). O nível-0 (curva contínua) da solução com $0 < q < 1$, o nível-0 (curva traçada) da solução com $q > 1$ e o núcleo (curva traço-ponto) de ambas. Consideramos $X_0 = (0.6; 1; 1.4)$ e $\lambda = 0.2$.

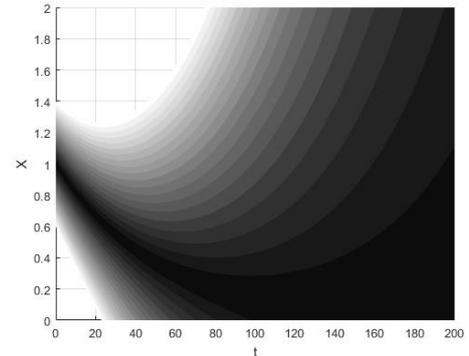


Figura 4: Representação gráfica da solução x do sistema (3) via H -derivada (ou L -derivada com $q > 1$). Parâmetros $\lambda = 0.2$ e condição inicial $x_0 = (0.6; 1; 1.4)$. A região mais escura está representando o 1-nível de $x(t)$.

Notamos então que a L-derivada é uma ferramenta adequada já que, por meio do parâmetro q (em (2)), apresenta a opção de controlar a incerteza crescente ou decrescente no tempo. Se $q > 1$, tem-se incerteza crescente e a solução coincide com a de H -derivada [9], enquanto $q < 1$, a L-derivada produz solução com incerteza decrescente, como vimos nas Figuras 1 e 2. Assim, o aparente “defeito” não está na derivada de Hukuhara e sim, em seu uso para modelar fenômenos em que espera-se incerteza decrescente.

• **Verhulst:** Agora vamos considerar o problema de crescimento populacional modelado pela equação logística. Suponha que a população está isolada, ou seja, não há migração e que a taxa de crescimento depende da densidade populacional. Neste caso, obtemos o problema de valor inicial fuzzy

$$x'_L(t) = x(t)(aK - ax(t)), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \tag{6}$$

sendo os parâmetros $a, K \in \mathbb{R}_+^*$ e $x(t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ a população no instant t . Os parâmetros a e K são, respectivamente, a taxa de crescimento intrínseca e a capacidade de suporte do ambiente. No modelo logístico a taxa de crescimento intrínseca ($a(K - x)$) depende da densidade populacional. Isto é, a taxa de crescimento intrínseca decresce à medida que a população aumenta [4]. Se consideramos a variável x crisp, temos que quando $x(t) < K$ a taxa de crescimento é positiva, quando $x(t) > K$ a taxa de crescimento é negativa, e, $x(t) = 0$ e $x(t) = K$ são estados de equilíbrio da equação logística.

Estamos considerando que a nossa solução é um processo fuzzy e além disso, podemos observar que $y = aK - ax$, ou seja, $y = q_1x + r_1$ com $q_1 = -a$ e $r_1 = aK$. Assim, x e y são números fuzzy linearmente correlacionados de acordo com a Definição 1.3.

Considerando os parâmetros $a = 0.01$ e $K = 5.8$ como no experimento de Gause em 1969 sobre cultivo de levedura *Schizosaccharomyces kephir* [4] e $x_0 = (0.1; 1; 2)$ um número

fuzzy triangular, obtemos

$$[x \cdot_L y]_\alpha = \begin{cases} [q_1(x_\alpha^-)^2 + x_\alpha^- r_1, q_1(x_\alpha^+)^2 + x_\alpha^+ r_1], & x_\alpha^- < x_\alpha^+ < \frac{K}{2} \\ [\min\{q_1(x_\alpha^-)^2 + x_\alpha^- r_1, q_1(x_\alpha^+)^2 + x_\alpha^+ r_1\}, \frac{-r_1^2}{4q_1}], & x_\alpha^- \leq \frac{K}{2} \leq x_\alpha^+ \\ [q_1(x_\alpha^+)^2 + x_\alpha^+ r_1, q_1(x_\alpha^-)^2 + x_\alpha^- r_1], & x_\alpha^+ > x_\alpha^- > \frac{K}{2} \end{cases} \quad (7)$$

No modelo logístico, quando o tempo aumenta a população tende a capacidade de suporte do ambiente (K). Dessa forma, esperamos que a incerteza diminua com o passar do tempo. Portanto, assim como no modelo anterior, vamos considerar que $x(t)$ é um processo fuzzy autocorrelacionado com $0 < q_2 < 1$ e usar o caso *ii.* do Teorema 1.2.

Portanto, o problema logístico (6), em níveis, se torna

$$\begin{cases} [(x_\alpha^+)', (x_\alpha^-)'] = [f_\alpha^-(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+), f_\alpha^+(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+)] \\ [x(0)]_\alpha = [x_{0\alpha}^-, x_{0\alpha}^+] \end{cases}, \quad (8)$$

sendo $[F(t, x)]_\alpha = [x(t) \cdot_L (aK - ax(t))]$. Dessa forma, obtemos um sistema de equação diferencial real para cada um dos três casos em (7). Então, para cada $\alpha \in [0, 1]$, resolvemos numericamente o sistema (8) pelo método de quarta ordem de Runge-Kutta. Na Figura 5, vemos as curvas de 0-nível e 1-nível e na Figura 6, podemos ver a representação gráfica da solução fuzzy $x(t)$. Nesse modelo temos que q_1 está relacionado a interação do campo e

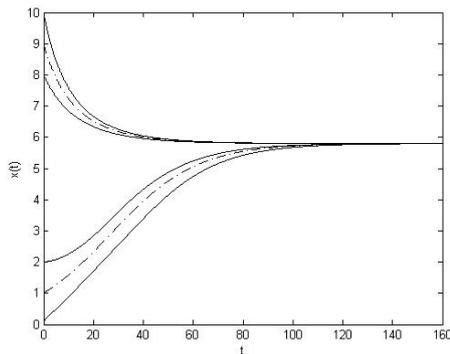


Figura 5: O 0-nível (curva contínua) e o núcleo (curva traço-ponto) da solução x do sistema (8) com $K = 5.8$, $a = 0.01$ e condições iniciais $x_0 = (0.1; 1; 2)$ e $x_0 = (8; 9; 10)$.

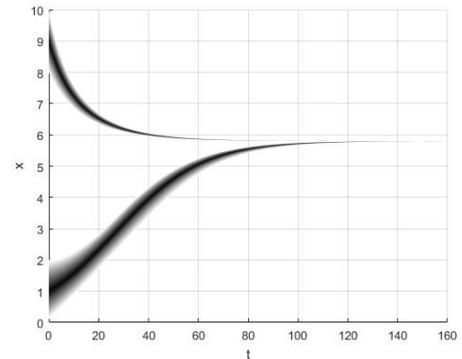


Figura 6: Representação gráfica da solução x do sistema (8) com $K = 5.8$, $a = 0.01$ e condições iniciais $x_0 = (0.1; 1; 2)$ e $x_0 = (8; 9; 10)$. A região mais escura está representando o 1-nível de $x(t)$.

q_2 está relacionada com a derivada, ou seja q_2 controla a fuzziness do modelo. Um estudo mais detalhado dos modelos apresentados pode ver visto em [9].

3 Conclusão

Neste trabalho, focamos em dois problemas clássicos de dinâmica populacional: Malthus e Verhulst. Os processos que representam a evolução temporal são considerados autocor-

relacionados, ou seja, o futuro está relacionado de alguma forma com o presente, isto é, há interatividade no processo evolucionário. A interatividade que estudamos aqui é através da teoria de conjuntos fuzzy. Assim, fez-se necessário o uso de uma derivada fuzzy que incorporasse essa interatividade. Para isso utilizamos a derivada fuzzy linearmente correlacionada (L -derivada) e discutimos o seu uso em comparação com a derivada de Hukuhara. Na modelagem com a L -derivada destacamos a importância do parâmetro q , uma vez que ele é que controla a fuzziness da dinâmica do sistema: $q > 1$ incerteza crescente e $q < 1$ incerteza decrescente.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq processos 305862/2013-8 e 141085/2014-2 pelo suporte financeiro.

Referências

- [1] L. C. Barros, R. C. Bassanezi and W. A. Lodwick. In *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*. Springer Berlin Heidelberg, v. 1, 2017. ISSN: 978-3-662-53324-6.
- [2] L. C. Barros and F. S. Pedro. Fuzzy differential equations with interactive derivative, *Fuzzy sets and systems*, v. 309, p. 64-80, 2017. DOI: 10.1016/j.fss.2016.04.002.
- [3] C. Carlsson, R. Füller and P. Majlender, Additions of Completely Correlated Fuzzy Numbers. In *Fuzzy Systems, 2004. Proceedings. 2004 IEEE International Conference on*. IEEE, vol. 1, p. 535-539, 2004. DOI: 10.1109/FUZZY.2004.1375791.
- [4] L. Edelstein-Keshet. In *Mathematical models in biology*. Siam, 1988. ISSN: 1095-7200.
- [5] L. T. Gomes, L. C. de Barros, and B. Bede. Fuzzy differential equation in various approaches. In *SpringerBriefs in Mathematics*. SBMAC- Springer, 2015. ISSN: 2191-8198.
- [6] O. Kaleva. Fuzzy differential equations, *Fuzzy sets and systems*, v. 24, n. 3, p. 301-317, 1987. DOI: 10.1016/0165-0114(87)90029-7.
- [7] M. L. Puri, D. A. Ralescu. Differentials of fuzzy functions. In *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. v. 91, n. 2, p. 552-558, 1983. DOI: 10.1016/0022-247X(83)90169-5.
- [8] S. Seikkala. On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy sets and systems*, v. 24, n. 3, p. 319-330, 1987. DOI: 10.1016/0165-0114(87)90030-3.
- [9] F. Santo Pedro, Sobre equações diferenciais para processos fuzzy linearmente correlacionados: aplicações em dinâmica de poluição, Tese de Doutorado, Unicamp, 2017.