

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Quadratura de Gauss de Alta Ordem Adaptativa no Método dos Elementos Finitos Generalizados

Werley G. Facco¹

Coordenadoria de Formação Geral, IFES, São Mateus, ES

Anderson Bastos²

Engenharia Mecânica, IFES, São Mateus, ES

Alex S. de Moura³

Departamento de Economia, UFJF, Governador Valadares, MG

Elson J. da Silva⁴

Departamento de Engenharia Elétrica, UFMG, Belo Horizonte, MG

Resumo. Para resolver a equação de Helmholtz, o Método de Elementos Finitos tradicional, requer uma malha com resolução mínima de dez pontos nodais por comprimento de onda. Por outro lado, o Método de Elementos Finitos Generalizados, onde a Partição de Unidade é enriquecida com as funções de ondas planas, fornece boas aproximações para a solução deste problema, utilizando uma malha com resolução maior que um comprimento de onda. No Método de Elementos Finitos Generalizados, em geral, usa-se quadratura de Gauss de alta ordem para calcular o valor das integrais das suas funções de base, o que produz um custo computacional adicional para o método. A principal contribuição deste trabalho, é apresentar uma abordagem capaz de minimizar o número de nós e pesos de Gauss, necessário na fase de cálculo de integrais do Método de Elementos Finitos Generalizados, sem perder a sua precisão. Para validar a abordagem apresentada, o Método de Elementos Finitos Generalizados será utilizado para resolver um problema eletromagnético modelado pela a equação de Helmholtz.

Palavras-chave. Método de Elemento Finito, Método de Elemento Finito Generalizado, Propagação de Ondas, Quadratura de Gauss-Legendre, Partição da Unidade, Equação de Helmholtz, Multiplicador de Lagrange.

1 Introdução

Neste trabalho o Método de Elementos Finitos Generalizado (MEFG), com o auxílio das funções de ondas planas, que são utilizadas para enriquecer as funções de forma do tradicional Método de Elemento Finito (MEF), será utilizado para resolver a equação de Helmholtz [1, 6, 7]. Utilizando as funções de ondas planas, que são soluções analíticas da Equação de Helmholtz para enriquecer a Partição da Unidade (PU) do MEF e uma malha

¹werleyfacco@ifes.edu.br

²emaildeandersonbastos@gmail.com

³alexsmoura100@gmail.com

⁴elson@cpdee.ufmg.br

com resolução maior que um comprimento de onda, o MEFG apresenta resultados com uma boa precisão numérica, quando aplicado a problemas de propagação e espalhamento de ondas [2]. Considerando a natureza oscilatória das funções de base do MEFG, para o cálculo das suas integrais é utilizado esquemas de alta ordem da quadratura gaussiana, o que provoca um aumento no custo computacional do método. A principal contribuição deste trabalho, é apresentar uma proposta capaz de calcular sem perder precisão numérica as integrais das funções de forma do MEFG, com um número menor de nós e pesos de Gauss em relação as abordagens tracionais. Para isto, foi desenvolvido uma metodologia que permite encontrar os nós e pesos de Gauss que estão melhores distribuídos no elemento de referência triangular. Considerando que neste trabalho o MEFG será aplicado para resolver um problema com mudança de meio, optou-se em utilizar o Multiplicador de Lagrange (ML) para garantir a continuidade entre os diferentes materiais [2, 4]. No que segue, será apresentado a formulação fraca de um problema de dispersão ou propagação eletromagnética onde o domínio é formado por duas regiões de diferentes materiais. Na Seção III serão apresentados os procedimentos e formulações que permitem encontrar os nós e pesos de Gauss utilizados para o cálculo das integrais, esta abordagem será chamada de quadratura gaussiana adaptativa. Os resultados computacionais e as conclusões deste trabalho serão apresentados nas seções IV e V, respectivamente.

2 Formulação

Para avaliar a proposta apresentada neste trabalho, um problema de propagação de onda em um domínio computacional Ω que é decomposto em dois subdomínios Ω_a e Ω_b conectados por uma interface Γ , como mostra a Fig. 1, será resolvido utilizando o MEFG com ML e uma malha conforme que cobre o domínio, com n_a nós em Ω_a e n_b nós em Ω_b .

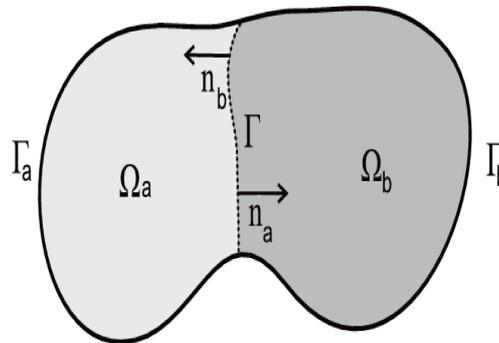


Figura 1: Subdomínios Ω_a e Ω_b com interface comum Γ .

Seguindo o procedimento usual [1,4], tem-se que a forma fraca da equação de Helmholtz em cada região é dada por

$$B_a(u, v) = \frac{1}{\alpha_a} \left[\int_{\Omega_a} (\nabla u_a \nabla v_a - k_a^2 u_a v_a) d\Omega + jk_a \int_{\Gamma_a} u_a v_a d\Gamma \right] - \int_{\Gamma} v_a \frac{1}{\alpha_a} \frac{\partial u_a}{\partial n_a} d\Gamma \quad (1)$$

e

$$L_a(v) = \frac{1}{\alpha_a} \left[\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} g_i^a v_a d\Gamma \right], \quad (2)$$

$$B_b(u, v) = \frac{1}{\alpha_b} \left[\int_{\Omega_b} (\nabla u_b \nabla v_b - k_b^2 u_b v_b) d\Omega + j k_b \int_{\Gamma_b} u_b v_b d\Gamma \right] - \int_{\Gamma} v_b \frac{1}{\alpha_b} \frac{\partial u_b}{\partial n_b} d\Gamma \quad (3)$$

e

$$L_b(v) = \frac{1}{\alpha_b} \left[\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} g_i^b v_b d\Gamma \right], \quad (4)$$

onde u_a e u_b são as z -componentes do campo elétrico ou magnético, v_a e v_b são as funções de teste e α_a e α_b representam a permissividade relativa (na formulação do campo magnético) ou a permeabilidade (na formulação do campo elétrico) sobre Ω_a e Ω_b , respectivamente. Os números de ondas k_a e k_b são constantes em cada subdomínio. As funções g_1^a , g_1^b e g_2^a , g_2^b em Γ_a e Γ_b provêm das condições de contorno de Neumann e da condição de contorno de Robin usada para truncar o domínio, respectivamente. As restrições ao longo da interface Γ são garantidas através do ML e finalmente encontra-se o sistema resultante do MEEG, como em [2, 4].

3 Integração Numérica

As integrais das Equações (1), (2), (3) e (4) são realizadas por meio de integração de Gauss-Legendre de alta ordem no elemento de referência triangular $T_e = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi, \eta, \xi + \eta \leq 1\}$, isto se faz necessário devido ao comportamento oscilatório dos integrandos. Os valores numéricos destas integrais são obtidos através da fórmula

$$\int_{T_e} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (5)$$

onde ξ e η são as coordenadas do elemento de referência T_e e f a função a ser avaliada.

A quadratura de Gauss em sua abordagem tradicional [3] quando aplicada ao elemento de referência T_e , tende a concentrar os pontos de integração em um dos seus vértices. Tal fato, pode afetar a precisão da integração, e para compensar, mais pontos de Gauss podem ser necessários.

No método tradicional, os nós e pesos de Gauss são encontrados no elementos de referência quadrangular $R_e = [-1, 1]^2$ e mapeados através das Equações (6) para o elemento de referência triangular T_e , veja Fig. 2.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{(1+x)(1-y)}{4} \\ \eta &= \frac{1+y}{2}, \end{aligned} \quad (6)$$

Esta concentração ocorre em função da abordagem tradicional usar o mesmo polinômio ortogonal para encontrar os pontos de integração no elemento quadrangular em ambas as coordenadas x e y de $[-1, 1]$. Neste caso, ao definir via Equação (6) o número de pontos em uma das coordenadas de T_e , a outra passa a ter um segmento de reta cada vez menor para que sejam distribuídas a mesma quantidade de pontos, provocando a concentração.

No esquema proposto neste trabalho, primeiramente obtém-se através da quadratura gaussiana de ordem N para o intervalo $[-1, 1]$ na coordenadas x de R_e os nós e pesos de Gauss, Equação (7)

$$\int_{-1}^1 g(x)dx \cong \sum_{i=1}^N \omega_{x_i} g(x_i), \tag{7}$$

onde x_i e ω_{x_i} são os respectivos nós e pesos de Gauss, $i = 1, \dots, N$ e g é um polinômio ortogonal. Em seguida, utilizando a mudança de variável Equação (8) obtém-se os correspondentes ξ_i e ω_{ξ_i} nós e pesos de Gauss no intervalo $[0, 1]$, veja Fig. 2.

$$\xi_i = \frac{1 + x_i}{2} \tag{8}$$

A diferença nesta proposta é a forma usada para a obter os pontos e pesos de Gauss na outra coordenada η de T_e . Neste caso, primeiro obtém-se através da quadratura gaussiana de ordem M (com $M \leq N$) para o intervalo $[-1, 1]$ na coordenadas y de R_e e os respectivos nós e pesos de Gauss, y_j e ω_{y_j} , $j = 1, \dots, M$ e considera-se o intervalo $[\xi_i, 1 - \xi_i]$, definido a partir dos nós ξ_i na coordenada ξ . Agora, com o auxílio da mudança de variável Equação (9) é possível encontrar os correspondentes η_j e ω_{η_j} nós e pesos de Gauss no intervalo $[\xi_i, 1 - \xi_i] \subset T_e$, veja Fig. 2. Desta forma, tem-se (ξ_i, η_j) como os nós de Gauss em T_e distribuídos uniformemente e $\omega_{\xi_i} \omega_{\eta_j}$ seus respectivos pesos de Gauss.

$$\eta_j = \frac{1 + \xi_i}{2} (1 + y_j) \tag{9}$$

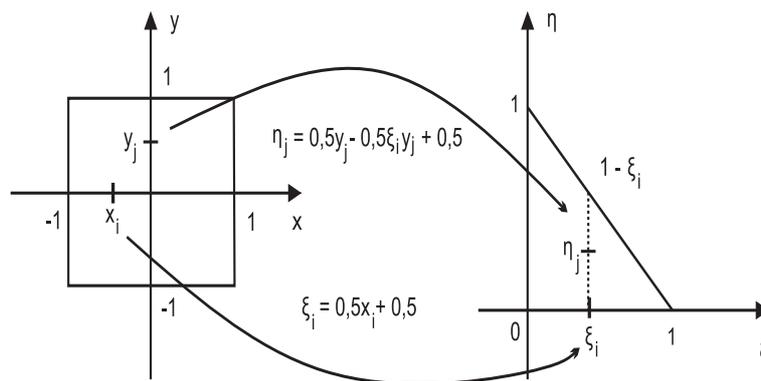


Figura 2: Mapeamento entre as coordenadas de R_e e T_e

4 Resultados e discussão

No que segue, serão apresentados e analisados os resultados computacionais obtidos através da proposta apresentada na Seção 3 no MEFG. Considere $\Omega = \Omega_a \cup \Omega_b$ um domínio quadrado, definido pela presença de dois meios, onde a interface encontra-se na linha $x = 0$, conforme mostrado na Fig. 3. Neste exemplo, considera-se a excitação transversal do campo elétrico TE_z e desejamos encontrar a componente z do campo magnético que satisfaz a equação de Helmholtz no domínio computacional Ω e a condição Robin nas fronteiras Γ_a e Γ_b formadas pelos lados do quadrado. O problema será resolvido usando o MEFG.

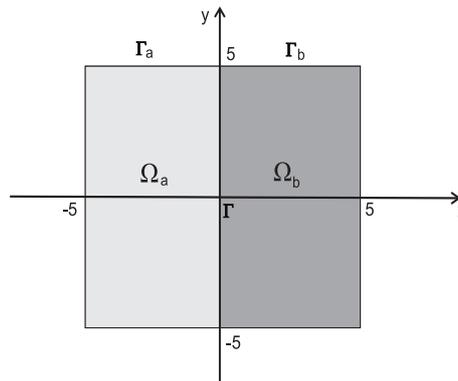


Figura 3: Domínio computacional Ω

Além disto, foi aplicado os seguintes dados nos cálculos: uma onda incidente de amplitude unitária com ângulo incidente $\theta_I = 15^\circ$; número de ondas $k_a = 2\pi$ e $k_b = \pi$; $h = 1.0\lambda_a$ (onde λ_a é o comprimento de onda em Ω_a). A malha usada para resolver o problema é composta de 164 elementos, 265 arestas e 102 nós. Sendo que destes nós, 11 estão sobre a interface Γ . Para analisar a convergência do MEFG a precisão do modelo é medida pelo erro na norma $L_2(\Omega)$ definido na linha $C_x = \{(x, y) | y = 0, -5 \leq x \leq 5\}$ [2].

No estudo realizado neste trabalho, com objetivo de encontrar uma distribuição uniforme para os nós de Gauss em T_e , optou-se por escolher N nós de Gauss na coordenada ξ e para cada intervalo $[\xi_i, 1 - \xi_i]$, veja Fig. 2, foi escolhido $M = N - (i - 1)$ nós de Gauss relativos a coordenada η . Além disto, ficou estabelecido com o resultado apresentado pela Fig. 4 que serão utilizadas $q = 18$ direções de ondas planas para verificar o desempenho da quadratura gaussiana adaptativa proposta neste trabalho. Para encontrar a real e imaginária q -convergência no MEFG com ML, resultado apresentado na Fig. 4, foi empregada a quadratura gaussiana tradicional, com 66 pontos no interior de cada triângulo e 6 ao longo das aresta.

A Fig. 5, mostra o efeito do número de Gauss na precisão dos resultados. Nota-se com a quadratura gaussiana tradicional que a partir de 66 pontos de Gauss o erro na aproximação numérica pelo MEFG tende a se estabilizar. Por outro lado, com a quadratura gaussiana adaptativa proposta neste trabalho, tal estabilidade ocorre a partir de 36 pontos de Gauss, o que representa uma redução no número de nós de Gauss de aproximadamente 46% em

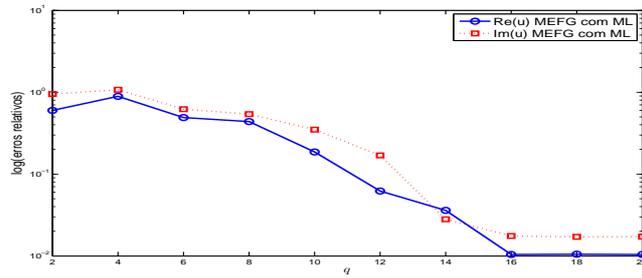


Figura 4: Real e imaginária q -convergência no MEFG com o ML.

relação ao método tradicional.

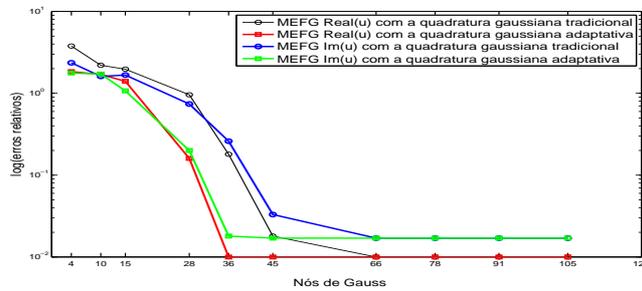


Figura 5: Erro relativo da solução MEFG $Real(u)$ e $Im(u)$ com a quadratura gaussiana tradicional e adaptativa versus nós de Gauss.

A Fig. 6 mostra a parte real e imaginária do campo magnético analítico e aproximado numericamente pelo MEFG com ML na linha C_x . Neste caso, foram também utilizadas $q = 18$ diferentes direções de ondas planas e 36 pontos de Gauss distribuídos uniformemente em T_e . Observa-se que o erro absoluto médio da partes real e imaginária são iguais a 0.0076 e 0.0091, respectivamente.

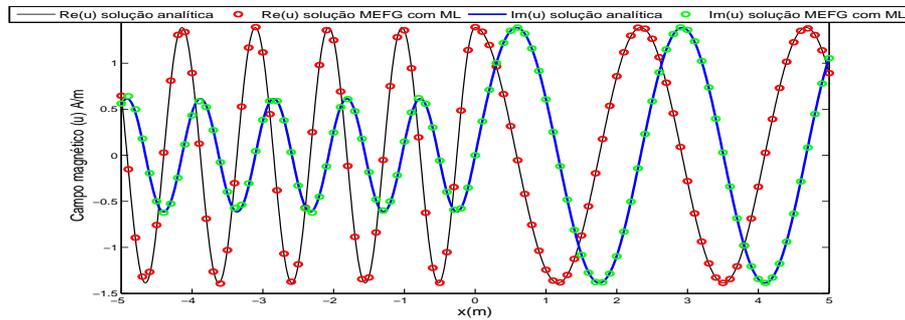


Figura 6: Parte real e imaginária do campo magnético analítico e aproximado numericamente pelo MEFG com o ML ao longo de C_x , com $\theta_I = 15^\circ$, $h_A = 1.0\lambda$ e $q = 18$.

5 Conclusões

Neste trabalho, um problema de propagação de ondas foi resolvido usando-se o MEFG com ML para impor condições de interface. A quadratura gaussiana adaptativa para o MEFG foi utilizada no cálculo das integrais e produziu uma redução no custo computacional causado pelo uso da quadratura gaussiana de ordem alta. Esta metodologia permitiu encontrar pontos de Gauss melhores distribuídos em relação ao método tradicional no interior do triângulo de referência T_e . Experimentos numéricos mostraram que a precisão do método não é afetada pelo procedimento aqui proposto.

Agradecimentos

Esse trabalho possui suporte em parte pela FAPES, FAPEMIG, CNPq e CAPES.

Referências

- [1] I. Babuska, and J. M. Melenk, The Partition of Unity Method, *International Journal of Numerical Methods in Engineering.*, 40: 727-758, 1997. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207.
- [2] W. G. Facco, E. J. Silva, A. S. Moura, N. Z. Lima, and R. R. Saldanha, Handling Material Discontinuities in the Generalized Finite Element Method to Solve Wave Propagation Problems, *IEEE Trans. On Magn.*, vol. 48, no. 2, pp. 607-610, 2012. DOI: 10.1109/TMAG.2011.2173309.
- [3] H. Farzana, M. S. Karima, A. Razwan, Appropriate Gaussian quadrature formulae for triangles, *International Journal of Applied Mathematics and Computation*, vol. 4, pp. 24-38, 2002. ISSN: 0974 - 4665.
- [4] O. Laghrouche, P. Bettess, E. Perrey-Debain, J. Trevelyan, and R. Hidayat, Wave Interpolation Finite Elements for Helmholtz Problems with Jumps in the Wave Speed, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, no. 194, pp. 367-381, 2005.
- [5] C. Lu, and B. Shanker, Hybrid Boundary Integral-Generalized (Partition of Unity) Finite-Element Solvers for the Scalar Helmholtz Equation, *IEEE Trans. On Magn.*, vol. 43, no. 3, pp. 1002-1012, 2007. DOI: 10.1109/TMAG.2006.888743.
- [6] A. Plaks, I. Tsukerman, G. Friedman, and B. Yellen, Generalized Finite Element Method for Magnetized Nanoparticles, *IEEE Trans. On Magn.*, vol. 39, no. 3, pp. 1436-1439, 2003. DOI: 10.1109/TMAG.2003.810408.
- [7] T. Strouboulis, I. Babuska, and R. Hidayat, The Generalized Finite Element Method for Helmholtz Equation: Theory, Computation, and Open Problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, no. 195, pp. 4711-4731, 2006.