Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma generalização da Desigualdade Forte de Fitzpatrick

Leonardo Moreto Elias[1]
Departamento de Engenharias da Mobilidade, UFSC, Joinville, SC
Juan Enrique Martínez-Legaz[2]
Departamento de Economia e de História Econômica, Universidade Autônoma de Barcelona, Barcelona, Espanha

Resumo. Este trabalho apresenta uma generalização da Desigualdade Forte de Fitzpatrick, envolvendo funções TBC. Ao final, introduz-se uma família de funções gap para o Problema de Inclusão Monótona Maximal e, graças à generalização proposta, é possível encontrar interessantes propriedades a respeito desta família .

Palavras-chave. Teoria de Operadores, Desigualdade Forte de Fitzpatrick, Problema de Inclusão Monótona.

1 Introdução

Na Teoria de Operadores, muitos autores se preocuparam em encontrar funções que representassem operadores $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ no contexto de funções convexas. A notação $\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ nos diz que estes operadores são aplicações do tipo ponto-conjunto, ou seja, associam elementos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ a subconjuntos do próprio $\mathbb{R}^n$. Uma das mais conhecidas funções representantes foi exibida por Fitzpatrick [6] em 1988.

Nos anos seguintes, surgiram trabalhos relacionados a operadores monótonos em que a função de Fitzpatrick teve papel fundamental, evidenciando a sua grande relevância para a área [7].

Em 2009, Voisei e Zalinescu [10] exibiram uma desigualdade, conhecida como Desigualdade Forte de Fitzpatrick, que ganhou diversas aplicações, como na análise de soluções para o Problema de Inclusão Monótona e em Problemas de Desigualdade Variacional [2].

Nosso trabalho tem âmbito teórico e objetivo principal é generalizar a desigualdade de Fitzpatrick. O texto é organizado da seguinte maneira: na Seção 2, fazemos revisão de alguns resultados a respeito de Operadores e funções de Fitzpatrick que serão usados no trabalho. Na seção 3, apresentamos nossa generalização da Desigualdade forte de Fitzpatrick. Na seção 4, introduzimos uma nova família de funções GAP para o problema de Inclusão Monótona.

[1]leonardo.elias@ufsc.br
[2]juanenrique.martinez.legaz@uab.cat

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0453

2 Preliminares

Nesta seção vamos apresentar resultados sobre Operadores Monótonos Maximais. Tais operadores são interessantes no contexto de Otimização pois englobam o operador subdiferencial. Os resultados a seguir são baseados em [9].

Recordamos ao leitor que para um operador ponto-conjunto $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, o seu gráfico e o seu domínio são dados, respectivamente, por

$$gra\ T := \{(x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x^* \in T(x)\} \ \text{ e } \ dom\ T := \{x \in \mathbb{R}^n \mid T(x) \neq \emptyset\}.$$

Um operador ponto-conjunto T é dito monótono quando

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

para todo $(x, x^*), (y, y^*) \in gra\ T$. Um operador monótono $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ é maximal quando não existe outro operador monótono cujo gráfico contém propriamente o gráfico de T.

A função de Fitzpatrick associada com o operador monótono maximal $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ é a função $F_T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$F_T(x, x^*) := \sup_{(y,y^*) \in gra\ T} \{\langle x - y, y^* \rangle + \langle y, x^* \rangle\}.$$

Equivalentemente,

$$F_T(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle - \inf_{(y,y^*) \in gra\ T} \langle x - y, x^* - y^* \rangle . \tag{1}$$

Se um operador $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ é monótono maximal, é possível provar que

$$F_T(x, x^*) \geq \langle x, x^* \rangle \ \text{ para todo } (x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

com igualdade se, e só se, $(x, x^*) \in gra\ T$.

Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ própria, convexa e sci, a sua conjugada de Fenchel$f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é definida por

$$f^*(x^*) := \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}$$

Deste modo, a conjugada de Fenchel de uma função $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é dada naturalmente por

$$g^*(x^*, x) = \sup_{(y,y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \{\langle (y, y^*), (x, x^*) \rangle - g(y, y^*)\}.$$

Notemos que a conjugada F_T^* da função de Fitzpatrick F_T associada com o operador monótono maximal T satisfaz a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} F_T^*(x^*, x) &\geq \sup_{(y,y^*) \in gra\ T} \{\langle (y, y^*), (x, x^*) \rangle - F_T(y, y^*)\} \\ &\geq \sup_{(y,y^*) \in gra\ T} \{\langle (y, y^*), (x, x^*) \rangle - \langle y, y^* \rangle\} \\ &= F_T(x, x^*). \end{aligned} \tag{3}$$

para todo $(x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1. *[4, Exercício 9.23] Seja $T : X \rightrightarrows X^*$ um operador monótono maximal. Então*

$$F_T(x,x^*) - \langle x,x^*\rangle + F_T(w,w^*) - \langle w,w^*\rangle \geq -\frac{1}{2}\langle x-w, x^*-w^*\rangle$$

para todo $(x,x^*),(w,w^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Usando a convexidade da função de Fitzpatrick e de (2), obtemos

$$F_T(x,x^*) - \langle x,x^*\rangle + F_T(w,w^*) - \langle w,w^*\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\left(\frac{1}{2}F_T(x,x^*) + \frac{1}{2}F_T(w,w^*)\right) - \langle x,x^*\rangle - \langle w,w^*\rangle \\
&\geq 2F_T\left(\frac{1}{2}(x+w), \frac{1}{2}(x^*+w^*)\right) - \langle x,x^*\rangle - \langle w,w^*\rangle \\
&\geq 2\left\langle \frac{1}{2}(x+w), \frac{1}{2}(x^*+w^*)\right\rangle - \langle x,x^*\rangle - \langle w,w^*\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\langle x-w, x^*-w^*\rangle .
\end{aligned}$$

□

Encerramos a seção com uma versão do Teorema de Dualidade de Fenchel cuja demonstração pode ser encontrada em [4, Teorema 4.4.18]. Esta versão será uma ferramenta crucial para o desenvolvimento da generalização proposta.

Teorema 2.2. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funções convexas tais que $0 \in int\ [dom\ f - dom\ g]$, em que int denota interior topológico dos conjuntos. Então*

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x)+g(x)\} = \sup_{x^*\in\mathbb{R}^n}\{-f^*(x^*) - g^*(-x^*)\} \tag{4}$$

e o supremo em (4) é atingido quando finito.

3 Generalização da Desigualdade de Fitzpatrick

Dizemos que uma função sci, convexa, própria $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é *Twisted Bigger Conjugate* (TBC) quando

$$-\langle x,x^*\rangle \leq g(x,x^*) \leq g^*(-x^*,-x) \tag{5}$$

para todo $(x,x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Estas funções nos permitem generalizar a desigualdade de Fitzpatrick. Apresentamos, em seguida, uma família de exemplos.

Exemplo 3.1. *A função $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por $g(x,x^*) := f(x) + f^*(-x^*)$, em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma função sci, convexa e própria, é uma função TBC. Em particular, g definida por $g(x,x^*) = \frac{1}{p}\|x\|^p + \frac{1}{q}\|x^*\|^q$, em que $p \geq 1$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, é uma função TBC.*

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0453

Agora exibimos a nossa contribuição. O resultado a seguir é original e pode ser encontrado em [5]. Como veremos em seguida, tal resultado generaliza a clássica Desigualdade Forte de Fitzpatrick.

Teorema 3.2. *Sejam* $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *um operador monótono maximal e* $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *uma função TBC. Considere as seguintes condições:*

(i) *dom* $F_T = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

(ii) *dom* $g = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Se uma destas hipóteses é satisfeita então

$$F_T(x, x^*) - \langle x, x^* \rangle \geq \frac{1}{2} \inf_{(w,w^*) \in gra\ T} g(w - x, w^* - x^*)$$

para todo $(x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. *Além do mais, esta desigualdade é estrita quando o ínfimo não é atingido.*

Demonstração. Para $(x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, considere o operador monótono maximal $L : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ definido por $L(y) := T(y+x) - x^*$. As funções F_L e g satisfazem as hipóteses do Teorema 2.2. Sendo assim, como $F_L(y, y^*) \geq \langle y, y^* \rangle$ e $g(y, y^*) \geq -\langle y, y^* \rangle$ para todo $(y, y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf_{(y,y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \{F_L(y, y^*) + g(y, y^*)\} \\ &= \sup_{(y^*,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \{-F_L^*(y^*, y) - g^*(-y^*, -y)\} \\ &\leq \sup_{(y^*,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \{-F_L^*(y^*, y) + \langle y, y^* \rangle\} \\ &\leq \sup_{(y^*,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \{-F_L(y, y^*) + \langle y, y^* \rangle\} \leq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

em que as duas últimas desigualdades seguem de (3) e de (5). Logo

$$\max_{(y^*,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \{-F_L^*(y^*, y) - g^*(-y^*, -y)\} = 0.$$

Portanto existe $(y^*, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $F_L^*(y^*, y) + g^*(-y^*, -y) = 0$. Novamente de (3), concluímos que $F_L(y, y^*) + g^*(-y^*, -y) \leq 0$. Então, como g é uma função TBC, $F_L(y, y^*) + g(y, y^*) \leq 0$ e assim, levando em conta a primeira desigualdade em (6), $F_L(y, y^*) + g(y, y^*) = 0$ e (y, y^*) é um minimizador de $F_L + g$.

Como

$$0 = F_L(y, y^*) + g(y, y^*) \geq F_L(y, y^*) - \langle y, y^* \rangle \geq 0,$$

temos

$$-g(y, y^*) = F_L(y, y^*) = \langle y, y^* \rangle.$$

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0453

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Segue da Proposição 2 que $(y, y^*) \in gra\ L$ e, considerando $(w, w^*) := (x + y, x^* + y^*)$, temos que $(w, w^*) \in gra\ T$ e $-g(w - x, w^* - x^*) = \langle w - x, w^* - x^* \rangle$, e do Teorema 2.1, concluímos que

$$\begin{aligned} F_T(x, x^*) - \langle x, x^* \rangle &= F_T(w, w^*) - \langle w, w^* \rangle + F_T(x, x^*) - \langle x, x^* \rangle \\ &\geq -\frac{1}{2} \langle w - x, w^* - x^* \rangle = \frac{1}{2} g(w - x, w^* - x^*), \end{aligned}$$

que encerra a prova. □

Diretamente do Exemplo 3.1, se considerarmos $g(x, x^*) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|x^*\|^2$, recuperamos a desigualdade clássica:

Corolário 3.3 (Desigualdade Forte de Fitzpatrick)**.** *Seja* $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *um operador monótono maximal. Então*

$$F_T(x, x^*) - \langle x, x^* \rangle \geq \frac{1}{4} \inf_{(w,w^*) \in gra\ T} \left\{ \|w - x\|^2 + \|w^* - x^*\|^2 \right\}$$

para todo $(x, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

4 Uma nova família de funções *gap*

Nesta seção, vamos aplicar a nossa generalização da Desigualdade de Fitzpatrick na construção de uma família de funções *gap* para o *Problema de Inclusão Monótona Maximal* (PIM). Recordamos que o PIM [2,3] é o problema de encontrar um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ para um operador monótono maximal $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in T(x)$. O conjunto solução (podendo ser vazio) é $T^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \in T(x)\}$.

Notamos que, para uma função subdiferenciável f, resolver PIM para o operador ∂f é equivalente a encontrar o minimizador global de f. Assim PIM generaliza muitos problemas de minimização de funções e, além do mais, atua no problema sob o ponto de vista da Teoria de Operadores.

No entanto, é possível transformar o PIM em um problema de otimização fazendo uso de uma ferramenta conhecida na literatura como função *gap* [2].

Definição 4.1. *Uma função gap para o PIM é uma função* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *satisfazendo as seguintes condições:*

i) $\varphi(x) \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $\varphi(x) = 0$ *se e somente se* $x \in T^{-1}(0)$.

Exemplo 4.1. *Dado um operador* $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *e sua respectiva função de Fitzpatrick* F_T*, definimos uma função gap* G_T *para PIM como* $G_T(x) := F_T(x, 0)$*, ou, mais explicitamente,*

$$G_T(x) = \sup_{(y,y^*) \in gra\ T} \langle x - y, y^* \rangle .$$

Diretamente da Proposição 2, concluímos que G_T *é uma função gap.*

O seguinte resultado tem uma prova imediata e pode ser encontrado em [2, Teorema 2.1].

Proposição 4.1. *Seja φ uma função gap para PIM. Se PIM tem uma solução, então* $\min_{x\in X}\varphi(x)=0$. *Por outro lado, se* $\inf_{x\in X}\varphi(x)=0$ *e* φ *é convexa, sci e fracamente coerciva no sentido de*

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\varphi(x)=+\infty$$

então PIM tem solução.

Este último resultado é a motivação para o estudo das funções *gap*, pois quando φ satisfaz suas hipóteses temos que seus minimizadores são exatamente os elementos do conjunto solução de PIM. Assim, podemos reformulá-lo como o problema de minimizar φ.

Definição 4.2. *[8, Definição 10.1.1] Uma função convexa própria* $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *é dita Tykhonov quando ela satisfaz as seguintes condições:*

(i) *Ela possui um único minimizador* $(\overline{x},\overline{x}^*)$.

(ii) *Se* (x_k,x_k^*) *é tal que* $g(x_k,x_k^*)\to g(\overline{x},\overline{x}^*)$ *então* $(x_k,x_k^*)\to(\overline{x},\overline{x}^*)$.

Exemplo 4.2. *[8, Exemplo 10.1.4] Toda função sci, convexa e própria com um único minimizador é Tykhonov. Em particular, funções estritamente convexas e sci com um minimizador.*

Definição 4.3 (Nossa família de funções *gap*)**.** *Para uma função* $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *não-negativa, Tykhonov, TBC e* $T:\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^n$, *definimos* $G_{T,g}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *por*

$$G_{T,g}(x):=\frac{1}{2}\inf_{(w,w^*)\in gra\ T}g(w-x,w^*).$$

Notamos que $G_{T,g}$ é convexa, pois a função $(x,w,w^*)\mapsto g(w-x,w^*)$ é convexa em seus três argumentos, desde que funções TBC são, por definição, convexas. Além do mais, ela é própria quando g for finita em algum $(w,w^*)\in gra\ T$. Diretamente do Teorema 3.2, temos que $G_T\geq G_{T,g}$, e logo $G_{T,g}$ é finita sempre que G_T seja finita. Em [2], é possível encontrar condições sob T que garantam que G_T seja finita.

Teorema 4.3. *Seja* $T:\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ *um operador monótono maximal e* $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *uma função não-negativa, Tykhonov, TBC. Então* $G_{T,g}$ *é uma função gap para o PIM.*

Demonstração. Notemos que $G_{T,g}(x)\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$, pois g é não-negativa. Além do mais, se $G_{T,g}(x)=0$ para algum $x\in\mathbb{R}^n$ então há $(w_n,w_n^*)\subset gra\ T$ tal que $g(w_n-x,w_n^*)\longrightarrow 0$. Como funções TBC não negativa possuem como minimizador o ponto $(0,0)$ e valor mínimo 0 e como g é Tykhonov, segue que $w_n\longrightarrow x$ e $w_n^*\longrightarrow 0$. Como gráfico de operadores monótonos maximais é sempre fechado, deduzimos que $(x,0)\in graT$, ou seja, $0\in T(x)$. Por outro lado, se $0\in T(x)$ então, usando que $(x,0)\in gra\ T$, obtemos que $0\leq G_{T,g}(x)\leq g(0,0)=0$, concluindo a prova. □

Notemos que, para $x\in X$ e g como no Teorema 4.3, se existe $(w,w^*)\in gra\ T$ tal que $g(w-x,w^*)=0$, então $G_{T,g}(x)=0$ e logo x é uma solução para o PIM. Deste modo, as funções *gap* revelam ser uma boa ferramenta para atacar estes problemas.

5 Conclusões

Concluimos que, através da nossa generalização, foi possível construir uma família de funções *gap* para o PIM. Essa nossa proposta teve dois fundamentos: primeiramente, definir funções *gap* para o PIM pode não ser uma tarefa fácil. Além do mais, nossa família de funções *gap* é majorada pela função *gap* de [2]. Esse resultado pode vir a ser útil em aplicações.

Recebemos uma resposta bastante positiva e animadora da revista Optimization. Isso nos motiva a seguir estudando esta família em trabalhos futuros, principalmente investigando as vantagens que elas trazem para os problemas de Desigualdade Variacional.

Referências

[1] H. H. Bauschke, J. M. Borwein, P. L. Combettes. *Essential smoothness, essential strict convexity, and Legendre functions in Banach spaces*, Commun. Contemp. Math., 615–647, 2001.

[2] J. Borwein e J. Dutta. *Maximal monotone inclusions and Fitzpatrick functions,* edição especial do J Optim Theory Appl. on Nondifferentiable Optimization and Nonsmooth Analysis, 2015. Doi:10.1007/s10957-015-0813-x. Versão online em 30 de Setembro.

[3] J. M. Borwein e A. Lewis. *Convex Analysis and Nonlinear Optmization: Theory and Examples,* Springer, 2000.

[4] J. M. Borwein e J. D. Vanderwerff. *Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples,* Cambridge University Press, 2010.

[5] L. M. Elias e J. E. Martínez-Legaz. *A generalization of the strong Fitzpatrick inequality*, Optimization 2016. Doi:10.1080/02331934.2016.1179738. Versão online em 07 de Maio.

[6] S. Fitzpatrick. *Representing monotone operators by convex functions,* Workshop Miniconference on Functional Analysis and Optimization, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., 20, Austral. Nat. Univ., Canberra, pág. 59-65, 1988.

[7] J.E. Martínez-Legaz e B. F. Svaiter. *Monotone operators representable by l.s.c. convex functions,* SetValued Analysis, vol. 13, pp. 21-46, 2005.

[8] R. Lucchetti. *Convexity and well-posed problems,* Springer, 2006.

[9] S. Simons. *From Hahn-Banach to Monotonicity,* Springer, 2008.

[10] M. D. Voisei e C. Zalinescu. *Strongly-representable monotone operators*, J. Convex Anal. 16, 1011-1033, 2009.

