

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

## Técnica de Partição do Domínio Aplicada a Equação de Laplace para Problemas Setorialmente Homogêneos

Carlos Friedrich Loeffler<sup>1</sup>

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES, Vitória, ES

João Paulo Barbosa<sup>2</sup>

Instituto Federal do Espírito Santo, IFES, São Mateus, ES

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES, Vitória, ES

Hercules de Melo Barcelos<sup>3</sup>

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES, Vitória, ES

**Resumo.** O Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem reconhecido desempenho nas aplicações em que o campo de variáveis é escalar, homogêneo e estacionário. No entanto, há uma gama de problemas nas ciências exatas e na engenharia em que o MEC não se aplica com tanta facilidade; entre estes, estão os problemas setorialmente não homogêneos. Para estes, as formulações de domínio, como os Métodos de Elementos Finitos (MEF), Métodos de Volumes Finitos (MVF) ou Método de Diferenças Finitas (MDF), apresentam vantagens consideráveis. Este trabalho apresenta um procedimento numérico simples e eficaz do MEC para modelar domínios com propriedades setorialmente heterogêneas. Para demonstrar a consistência da técnica, são feitas simulações numéricas em problemas de Laplace com conformação geométrica irregular, tendo como referência os resultados do MEF.

**Palavras-chave.** Método dos Elementos de Contorno, Homogeneidade Setorial, Equação de Laplace.

## 1 Introdução

A solução de problemas setorialmente homogêneos governados pela Equação de Laplace é feita preferencialmente através de métodos numéricos que discretizam o domínio, pois em cada subdomínio se introduz facilmente o valor da propriedade constitutiva correspondente. No MEC, tal inserção apresenta relativa dificuldade e a única abordagem eficiente para essa situação é a técnica das sub-regiões [1].

Este trabalho apresenta uma alternativa para tratar esta categoria de problemas com relativa simplicidade. Nesta técnica, o domínio completo é particionado em um domínio homogêneo circundante ao qual se somam subdomínios internos com homogeneidades setoriais. A energia de cada subdomínio ou setor é computada ao sistema como um todo por superposição, semelhantemente ao que se faz com uma fonte ou ação de domínio em

---

<sup>1</sup>carlosloeffler@bol.com.br

<sup>2</sup>jpbarbosa@ifes.edu.br

<sup>3</sup>engercules@gmail.com

problemas de Poisson [4]. Todos os setores estão ligados matematicamente por meio de coeficientes de influência, que são gerados por integrações realizadas no contorno dos subdomínios, com os pontos fontes localizados em cada ponto nodal gerado pela discretização.

### 1.1 Aproximação do MEC para Equação de Laplace

A equação integral MEC inversa para problemas de Laplace é bem conhecida [1], sendo:

$$K \left[ \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma + \int_{\Omega} u(X)u_{,ii}^*(\xi; X)d\Omega \right] = 0 \quad (1)$$

Na equação (1),  $u(X)$  é o potencial escalar e  $q(X)$  sua derivada normal, reciprocamente, as funções auxiliares são  $u^*(\xi; X)$  e  $q^*(\xi; X)$  obtidas pela função delta de Dirac, utilizando as propriedades dessa função a equação integral de contorno é a equação (2).

$$K \left[ \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma + c(\xi)u(\xi) \right] = 0 \quad (2)$$

O coeficiente  $c(\xi)$  depende da posição do ponto  $\xi$  em relação ao domínio físico  $\Omega(X) + \Gamma(X)$ . Se localizado no contorno  $\Gamma(X)$ ,  $c(\xi)$  também depende da suavidade deste [2].

Aplicando os procedimentos matemáticos típicos do MEC, que incluem uma varredura sobre as integrações de contorno com diferentes pontos nodais localizados no contorno e também o processo de discretização, matrizes  $H$  e  $G$  são geradas, na forma:

$$K [H] \{u\} = K [G] \{q\} \quad (3)$$

## 2 Técnica de Partição do Domínio

Considere um domínio constituído por duas regiões com diferentes propriedades físicas, conforme Figura 1, onde o domínio completo  $\Omega$  é composto pela soma dos domínios  $\Omega^e$  e  $\Omega^i$ , sendo  $K^e$  e  $K^i$  as propriedades físicas constantes.

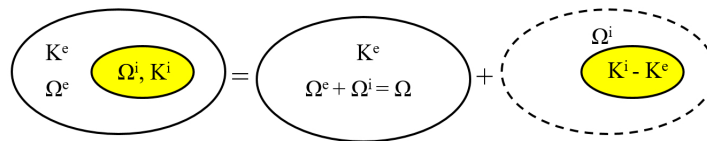


Figura 1: Domínios completos e setoriais com propriedades homogéneas.

Considere-se que o núcleo das integrais é composto por funções integráveis e dentro de cada subdomínio as propriedades são constantes. Supondo-se, que  $K^i = K^e + K^s$ :

$$\int_{\Omega} K(X)u(X)_{,ii} u^*(\xi; X)d\Omega(X) = K^e \int_{\Omega} u(X)_{,ii} u^*(\xi; X)d\Omega(X) + K^s \int_{\Omega^i} u^i(X)_{,ii} u^*(\xi; X)d\Omega^i(X) = 0 \quad (4)$$

Agora, a propriedade  $K^e$  compreende todo o domínio. Reescrevendo a equação (4)

$$K^e \int_{\Omega} u(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega(X) = (K^e - K^i) \int_{\Omega^i} u^i(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega^i(X) = 0 \quad (5)$$

No MEC, a equação integral está relacionada com o equilíbrio de energia no sistema, no caso, entre a energia difusiva e o trabalho dos fluxos. No método proposto é necessária apenas a avaliação da quantidade de energia difusiva presente no subdomínio, como é feito na aplicação do trabalho devido a uma fonte ou ação externa.

Reescrevendo-se o lado direito da equação (5) na forma integral de contorno, considerando os pontos nodais localizados no domínio  $\Omega^i(X)$  por simplicidade:

$$(K^e - K^i) \int_{\Omega^i} u^i(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega^i(X) = (K^e - K^i) \left[ \int_{\Gamma^i} q^i(X) u^*(\xi; X) d\Gamma^i(X) - \int_{\Gamma^i} u^i(X) q^*(\xi; X) d\Gamma^i(X) - c(\xi) u^i(\xi) \right] \quad (6)$$

O valor de  $c(\xi)$  na equação (6) é dependente da forma como o setor interno ( $\Omega^i$ ) em relação ao domínio ( $\Omega$ ) [1, 2]. Vê-se que a primeira integral de contorno no lado direito da equação (6) representa o trabalho de fluxo  $q^i(X)$ , enquanto que a outra representa a energia difusiva que é expressa como uma função do potencial de  $u^i(X)$ . Considera-se então apenas uma destas formas de energia, o que é muito mais fácil de fazer considerando a energia difusiva, que é dada em função dos potenciais nos pontos internos  $u^i(X)$ . Logo:

$$\int_{\Gamma} u(X) q^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q(X) u^*(\xi; X) d\Gamma(X) + c(\xi) u(\xi) = - \frac{(K^e - K^i)}{K^e} \int_{\Gamma^i} u^i(X) q^*(\xi; X) d\Gamma^i(X) \quad (7)$$

Ressalta-se que o trabalho dos fluxos no domínio interna não é nulo; entretanto, basta computar a energia difusiva total da partição no balanço de energia [3]. Todo o lado esquerdo da equação (7) é afetado pela energia difusiva assim introduzida.

## 2.1 Discretização e Aspectos Matriciais

Inicialmente, considerando que o  $\Gamma^i(X)$  e  $\Gamma(X)$  não tenha interseção, os pontos fontes  $\xi$  estão localizados exclusivamente no  $\Gamma(X)$  e as integrações são realizadas em  $\Omega^i(X)$ . Os pontos internos agora devem ser entendidos como nós de contornos da partição como mostrado na Figura 2, no qual o potencial tem valores desconhecido  $u^i$  que são destacadas no sistema de matricial do MEC conforme equação (8).

$$[H] \{u\} + [H^i] \{u^i\} = [G] \{q\} \quad (8)$$

Os potenciais internos devem ser explicitados, de modo que matriz  $H$  fica:

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & H_{ci} \\ H_{ic} & H_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} \\ G_{ic} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} \quad (9)$$

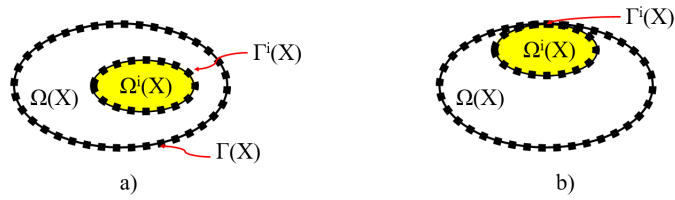


Figura 2: Contorno  $\Gamma^i(X)$ : a) Não coincide com o  $\Gamma(X)$ ; b) Coincide com o  $\Gamma(X)$ .

As coordenadas dos pontos fonte internos  $u_i$  definem os contornos  $\Gamma^i(X)$  e  $u_c$  e  $q_c$  são valores das grandezas nos pontos nodais no contorno  $\Gamma(X)$ . A submatriz  $H_{ci}$  representa coeficientes gerados por integração no contorno interno  $\Gamma^i(X)$  com os pontos em  $\Gamma(X)$ .

### 3 Simulação Numérica

Problemas com geometrias irregulares foram escolhidos para comparação entre o MEF e a técnica de partição do domínio do MEC. A medida da diferença relativa entre os métodos é dada por: o módulo do valor máximo obtido com o MEF compõe o denominador; e o módulo da diferença entre os valores do MEF e o do MEC compreende o numerador. A diferença relativa média é a soma das diferenças dividida pelo número de pontos no contorno. Tanto no MEC quanto no MEF os elementos têm interpolação linear.

#### 3.1 Exemplo 1

Considera-se uma geometria trapezoidal com um círculo no seu interior de propriedades distintas, conforme mostra a Figura 3, que também apresenta as condições de contorno. Para cada método foram usadas três malhas cujos dados são mostrados na Tabela 1.

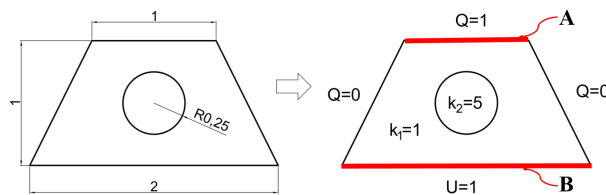


Figura 3: Características geométricas e condições de contorno para o exemplo 1.

Nas Figuras 4 e 5 analisam-se respectivamente os resultados dos potenciais e derivadas obtidos com o MEF e MEC, como indicado no lado direito da Figura 3 pelas letras A e B.

Considerando as malhas mais refinadas de cada método, a diferença relativa media do potencial entre os métodos é de 0,0049% e da derivada do potencial é de 0,0841%. A diferença relativa na derivada do potencial é maior, devido as quinas da geometria do trapézio e também pela maior sensibilidade desta grandeza. Verifica-se que as diferenças relativas do potencial e da derivada são muitos reduzidos, mesmo o MEC tendo um número de pontos nodais aproximadamente 72 vezes menor do que o MEF.

Tabela 1: Quantidade de nós nas malhas do MEF e MEC do exemplo 1.

	Elementos	total	contorno	internos	em $y=1$	em $y=0$
MEF	9742	5003	262	4741	51	100
MEF	12640	6468	294	6174	57	112
MEF	38594	19560	524	19036	101	200
MEC		74	50	24	11	21
MEC		140	100	40	21	41
MEC		270	200	70	41	81

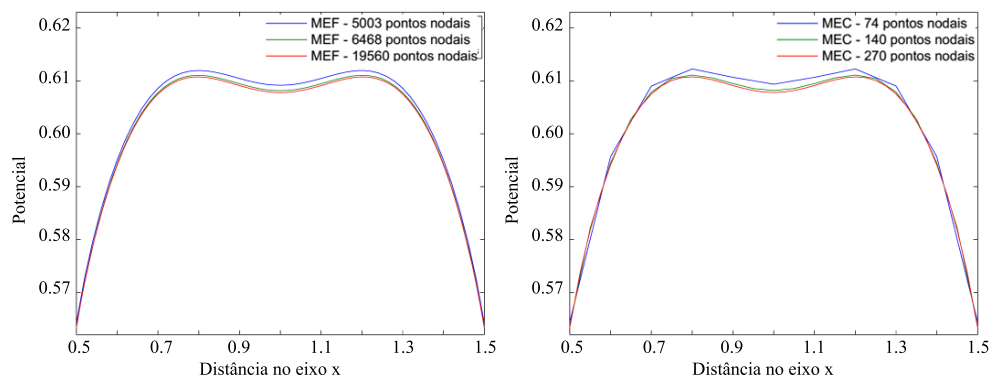


Figura 4: Resultado do Potencial do MEF e MEC (exemplo 1).

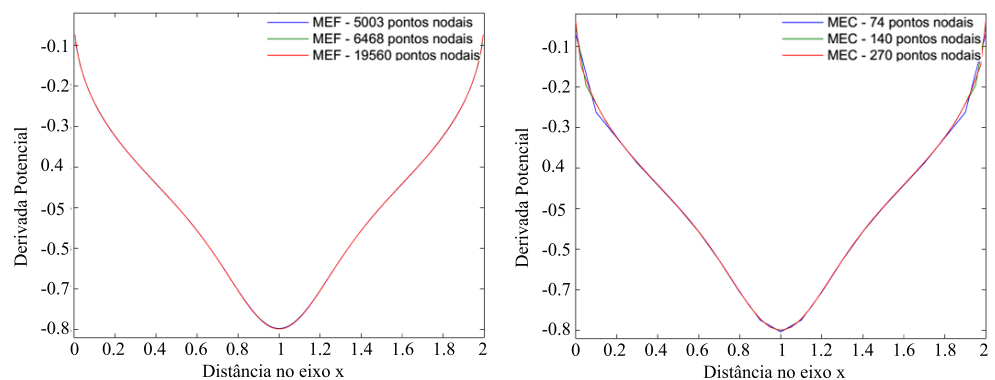


Figura 5: Resultado da Derivada Potencial do MEF e MEC (exemplo 1).

### 3.2 Exemplo 2

A segunda simulação mostra uma geometria com várias quinas, além de um triângulo na base com propriedades diferentes e pontos nodais coincidentes da partição com o contorno externo. Também foram utilizadas 3 malhas, conforme a Tabela 2, e a geometria com as condições de contorno utilizadas são indicadas na Figura 6.

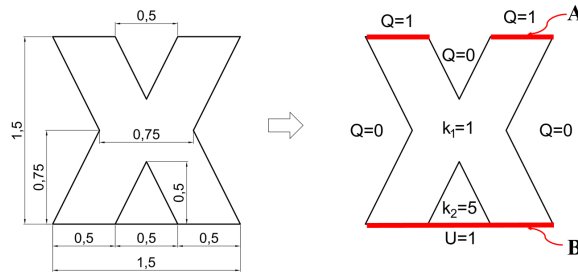


Figura 6: Características geométricas e condições de contorno para o exemplo 2.

Nas Figuras 7 e 8 foram analisados, respectivamente, os resultados dos potenciais e derivadas dos potenciais pelo MEF e MEC. As derivadas foram calculadas nas arestas assinaladas pela letra B e os potenciais pela letra A, conforme mostra a Figura 6.

Tabela 2: Quantidade de nós nas malhas do MEF e MEC do exemplo 2.

	Elementos	total	contorno	internos	em $y=1$	em $y=0$
MEF	4251	2245	237	2008	36	51
MEF	16736	8605	472	8133	70	102
MEF	45854	23320	784	22536	114	168
MEC		149	130	19	22	31
MEC		299	260	39	42	61
MEC		599	520	79	82	121

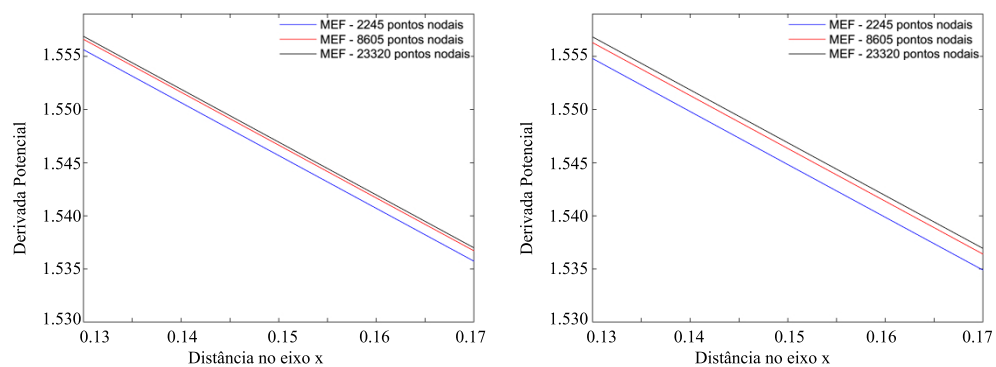


Figura 7: Resultado do Potencial do MEF e MEC em uma parte do contorno (exemplo 2).

Para as malhas mais ricas a diferença relativa média do potencial foi de 0,0036% e para a derivada do potencial foi de 0,1481%. Pelas mesmas razões apontadas no exemplo anterior, a diferença relativa média da derivada do potencial é maior. As diferenças entre os métodos foram muito reduzidas, mesmo tendo o MEC um número de nós aproximadamente

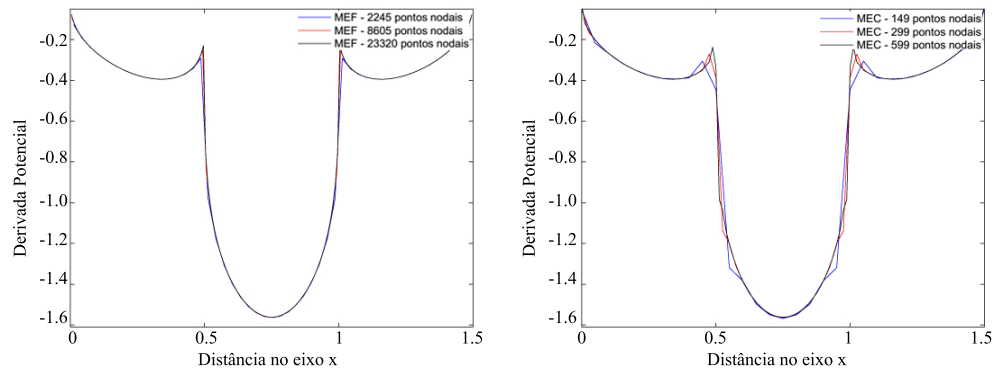


Figura 8: Resultado da Derivada Potencial do MEF e MEC (exemplo 2).

39 vezes menor.

## 4 Conclusões

Os resultados numéricos obtidos mostraram um desempenho muito favorável da técnica de partição do domínio, indica que poderá ser usada com êxito em problemas onde as propriedades físicas do domínio variam setorialmente. A precisão da técnica do MEC foi equivalente à do MEF, mesmo utilizando um número muito menor de pontos nodais. Isto pode ser justificado pelo fato de que todos os pontos nodais interagem entre si. O método mostra também uma vantagem significativa em termos de simplicidade na implementação e entrada de dados. Para implementar o modelo proposto, é necessário apenas gerar um novo tipo de matriz  $H$ , que contém a energia potencial relacionada aos setores internos, e adicioná-la ao sistema clássico do MEC.

## Referências

- [1] C. A. Brebbia, S. Walker, *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, London, 1980.
- [2] O. J. Kythe, *An Introduction to Boundary Element Methods*, CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [3] C. F. Loeffler, A. J. C. Andrade. Comparison Between the classical Sub Regions Technique and a new Approach with Domain Superposition to solve Sectorial Inhomogeneous Laplace's Problems. In: *XXXVII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2016, Brasília: *Revista Interdisciplinar de pesquisa em Engenharia*, 2016. v. 1. p. 1-14.
- [4] C. F. Loeffler, W. J. Mansur, Sub-regions without subdomain partition with boundary elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 71, p. 169-173, 2016.