Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Modelo de Solow com Memória

João Plínio Juchem Neto[1]
Centro de Tecnologia de Alegrete, UNIPAMPA, Alegrete, RS
Celso Nobre da Fonseca[2]
Centro de Tecnologia de Alegrete, UNIPAMPA, Alegrete, RS

Resumo. Neste trabalho propomos uma generalização do modelo de crescimento econômico de Solow, com a introdução de efeitos de memória do tipo lei de potência, através da derivada fracionária de Caputo de ordem não-inteira $\alpha > 0$. Através de simulações numéricas, utilizando um método híbrido e um método preditor-corretor PECE para equações diferenciais fracionárias, mostramos que: para $0 < \alpha < 1$, o efeito memória faz com que o capital *per capita* dado pelo modelo modificado convirja para seu estado estácionário com uma velocidade menor do que o modelo de Solow tradicional ($\alpha = 1$); já para $\alpha > 1$, sua introdução implica em uma convergência mais rápida. Como o modelo de Solow tradicional costuma superestimar a velocidade de convergência de uma economia para seu estado estacionário, quando comparado com dados empíricos, os resultados obtidos aqui sugerem que o modelo de Solow com efeitos de memória, considerando $0 < \alpha < 1$, poderia ser utilizado para melhor explicar e descrever as velocidades de convergência observadas na realidade.

Palavras-chave. Modelagem Matemática, Modelo de Solow, Efeitos de Memória, Cálculo Fracionário, Derivada de Caputo, Métodos Numéricos.

1 Introdução

Recentemente o conceito de derivadas de ordem não-inteira tem sido aplicado em modelos econômicos de crescimento natural [10,12], modelos logísticos [4,13] e em definições alternativas de elasticidade [11], de forma a generalizá-los no sentido de incorporarem efeitos de memória. Tais efeitos de memória capturam o fato de que o valor das variáveis de um sistema dinâmico em um dado instante do tempo também depende do valor destas variáveis em instantes anteriores. Para tanto, a definição de derivada fracionária de Caputo tem sido utilizada para modelar processos com memória de longo prazo seguindo uma lei de potência [2,10].

Seguindo esta linha, neste trabalho propomos a introdução deste tipo de memória no modelo de crescimento econômico de Solow [1,7,8], utilizando a derivada fracionária de Caputo. Uma característica do modelo de Solow tradicional, sem memória, é que ele costuma apresentar velocidades de convergência ao estado estacionário do capital *per capita* maiores do que os observados empiricamente [1]. Sendo assim, iremos ilustrar numericamente o comportamento dinâmico deste modelo com memória, utilizando um método

[1]plinio@unipampa.edu.br
[2]celsofonseca@unipampa.edu.br

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0396

numérico híbrido [9] e um método preditor-corretor PECE para equações diferenciais fracionárias (FracPECE) [3], comparando os resultados obtidos com o modelo tradicional e verificando, qualitativamente, as diferenças apresentadas nas velocidades de convergência.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: na Seção 2 abordamos o modelo de Solow tradicional e procedemos à sua generalização com a introdução de efeitos de memória; na Seção 3 discutimos o método numérico híbrido utilizado na simulação do modelo; na Seção 4 apresentamos e discutimos os resultados obtidos com a aplicação dos métodos híbrido e FracPECE; e por fim, na Seção 5, finalizamos com as conclusões.

2 Modelo de Solow Tradicional e com Memória

O modelo de crescimento econômico de Solow descreve a evolução temporal do estoque de capital, $K(t) > 0$, e de mão-de-obra, $L(t) > 0$, em uma economia. Matematicamente, este modelo é dado pelo seguinte sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias:

$$\dot{K} = sAK^{\phi}L^{1-\phi} - \delta K \tag{1a}$$

$$\dot{L} = \eta L \tag{1b}$$

sendo $0 < s < 1$ a taxa de poupança da economia, $A > 0$ um fator tecnológico, aqui considerado constante, $0 < \phi < 1$ a intensividade do uso do capital no processo produtivo, $0 < \delta < 1$ a taxa de depreciação do capital e $0 < \eta < 1$ a taxa de crescimento da mão-de-obra. Nesta formulação do modelo estamos considerando uma função de produção de Cobb-Douglas. O estoque inicial de capital, $K(0) = K_0 > 0$, e de mão-de-obra, $L(0) = L_0 > 0$, fornecem as condições iniciais para este sistema. Observe que a equação (1a) informa que a taxa de variação do capital é igual ao investimento líquido da economia no instante atual, $I(t) = sAK(t)^{\phi}L(t)^{1-\phi} - \delta K(t)$, e que (1b) diz que a taxa de variação da mão-de-obra é proporcional à mão-de-obra atual, $L(t)$, o que implica em um crescimento exponencial para a mesma. É possível mostrar que este modelo possui solução fechada, que o capital *per capita*, $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$, converge para o estado estacionário $k_{\infty} = \lim_{t\to+\infty} k(t) = \left(\frac{sA}{\eta+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}$ e que neste estado estacionário $K(t)$ e $L(t)$ crescem à taxa constante do crescimento da mão-de-obra, η (ver capítulo 1 de [1]).

A fim de introduzir no modelo de Solow tradicional (1a)-(1b) um efeito de memória do tipo lei de potência, seguiremos a metodologia proposta em [10, 12]. Para tanto, utilizaremos a derivada fracionária de Caputo à esquerda de ordem não-inteira α, a qual é definida pela integral:

$$(D^{\alpha}_{0+}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau,\ n-1 < \alpha < n \tag{2}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gama e $n = \lceil \alpha \rceil$, sendo $\lceil \cdot \rceil$ a função teto. Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$, então definimos $(D^{\alpha}_{0+}f)(t) = f^{(n)}(t)$, que é a derivada de ordem inteira n tradicional. Sendo assim, a generalização do modelo de Solow, levando em conta efeitos de memória de ordem

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0396

$\alpha > 0$, é dada pelo seguinte sistema de equações diferenciais fracionárias:

$$(D^{\alpha}_{0+}K)(t) = sAK^{\phi}L^{1-\phi} - \delta K \tag{3a}$$

$$(D^{\alpha}_{0+}L)(t) = \eta L \tag{3b}$$

Se $\alpha = 1$ em (3a)-(3b), o modelo de Solow tradicional sem efeitos de memória, (1a)-(1b), é recuperado. Para $0 < \alpha < 1$ e $\alpha > 1$, $(D^{\alpha}_{0+}f)(t)$ se torna no operador não-local dado pela integral (2), o qual leva em consideração o estado do sistema em todos os instantes anteriores ao momento atual t, considerando uma memória na forma da lei de potência $(t-\tau)^{-\alpha+n-1}$, $0 \leq \tau \leq t$.

3 Método Numérico Híbrido

Chamamos de solução numérica de uma equação diferencial ordinária ao procedimento empregado no cálculo de uma estimativa associada a um conjunto de pontos discretos, solucionado de forma incremental, de passo h, começando em um ponto t_0 para o qual um valor inicial $y_0 = y(t_0)$ é fornecido. Em seguida, usando a solução no primeiro ponto, determina-se a solução y_1 para um segundo ponto próximo $t_1 = t_0 + h$ e assim sucessivamente até a determinação do valor numérico da função no último ponto de uma malha de tamanho N que tem $t_0 \leq t \leq t_f$.

Os operadores derivada de Grunwald Letnikov e de Riemmann-Liouville são equivalentes, segundo [9], para uma classe de funções contínuas até ordem de derivada α não-inteiro. Dado um valor inteiro $n = \lceil \alpha \rceil$, consideremos a equação diferencial fracionária $(D^{\alpha}_{a}y)(t) = F(t, y(t))$, $t > a$, no problema de valor inicial (4):

$$\begin{cases} (D^{\alpha}_{0+}y)(t) = F(t, y(t)) \\ \frac{d^k y(t)}{dt^k} = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots n-1 \end{cases} \tag{4}$$

Segundo [9], sua solução pode ser aproximada por:

$$y(t) = h^{\alpha}F(t, y(t)) - \sum_{k=1}^{N} c_k^{\alpha} y(t - kh), \; N \geq n. \tag{5}$$

Para a equação diferencial $(D^{\alpha}_{0+}y)(t) = F(t, y(t))$ com problema de valor inicial, uma aproximação numérica de sua solução pode ser determinada a partir da seguinte expressão recursiva:

$$y_{i+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{l,l+1} F(t_l, y_l) \right) + \frac{a_{i+1,i+1}}{\Gamma(\alpha)} F(t_i, y_i) \;, \tag{6}$$

onde:

$$a_{l,i+1} = \begin{cases} \frac{h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)} \left(i^{\alpha+1} - (i-\alpha)(i+1)^{\alpha} \right), \text{ se } l = 0 \\ \frac{h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)} \left((i-l+2)^{\alpha+1} + (i-l)^{\alpha+1} - 2(i-l+1)^{\alpha+1} \right), \text{ se } 1 \leq l \leq l \\ \frac{h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}, \text{ se } l = i+1 \end{cases} \tag{7}$$

Já um método um pouco mais demorado algoritmicamente, mas mais preciso, conhecido como método híbrido, pode ser utilizado para obter soluções de problemas de valor inicial. Para funções contínuas, segundo a derivada fracionária de Caputo [9], a seguinte expressão pode ser usada na aproximação numérica da solução de (4):

$$y_{i+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{l,l+1} F(t_l, y_l) \right) + \frac{a_{i+1,i+1}}{\Gamma(\alpha)} F(t_i, \tilde{y}_i) , \tag{8}$$

onde $\tilde{y}_i$ é determinado pela expressão:

$$\tilde{y}_{i+1} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{y_0^{(l)}}{l!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{k=0}^{i} b_{k,i+1} F(t_k, y_k) \right) , \tag{9}$$

sendo:

$$b_{k,i+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((i+1-k)^\alpha - (i-k)^\alpha) \ . \tag{10}$$

A partir deste ponto, um algoritmo proposto por [9] pode ser usado para o método híbrido, a fim de aproximar a solução de (4). Neste algoritmo é usada a expressão (8) e gerada um conjunto $C = \{y_0, y_1....y_m\}$ com as m primeiras soluções numéricas de (4). A partir de y_m, então, usa-se a equação (11), também recursiva, para gerar um conjunto $R = \{y_{m+1}....y_{N-1}\}$ de soluções, as quais unidas, formam sua solução numérica $S = \{y_0, y_2....y_m, y_{m+1}....y_{N-1}\}$, para uma malha de tamanho N.

$$y(i+1) = h^\alpha(F(t_i, y_i) + \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{y_0^{(k)} t_{i+1}^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} - \sum_{k=1}^{i+1} C_k^\alpha y_{i-k+1} , \tag{11}$$

onde C_k^α é dado pela seguinte função recursiva:

$$\begin{cases} C_0^\alpha = 1, \text{ se } k = 0 \\ C_k^\alpha = (1 - \frac{\alpha+1}{k}) C_{k-1}^\alpha, \text{ se } k \geq 1 \end{cases} \tag{12}$$

Este método híbrido (8)-(12) será utilizado na resolução numérica do sistema (3a)-(3b).

4 Discussão dos Resultados

Com o intuito de ilustrar o comportamento dinâmico do modelo de Solow com memória, implementamos no MATLAB o método numérico híbrido apresentado acima na resolução do sistema (3a)-(3b), considerando os parâmetros $s = 0.2$, $A = 1$, $\phi = 0.5$, $\delta = 0.05$, $\eta = 0.02$ e as condições iniciais normalizadas $K_0 = L_0 = 1$. Na Figura 1 apresentamos os resultados desta simulação para a evolução do estoque de capital (gráfico à esquerda) e da mão-de-obra (gráfico à direita) até o tempo $T = 100$, considerando vários valores de α. Em ambos gráficos, a linha preta indica a solução do modelo de Solow tradicional, quando $\alpha = 1$. Para tempos grandes, podemos observar que, para $\alpha < 1$, quanto menor α, mais lento é o crescimento tanto do capital, quanto da mão-de-obra, quando comparados ao modelo tradicional. Já quando $\alpha > 1$, quanto maior α, mais rápido é o crescimento. É interessante observar que, para tempos pequenos, próximos de $t = 0$, esta dependência da taxa de crescimento em relação ao parâmetro α se inverte. Tal impacto do parâmetro de memória α no crescimento de longo prazo das variáveis é similar ao obtido em [10] para o modelo linear de crescimento natural, onde é apresentada a analogia com a difusão anômala observada em certos fenômeno físicos: $0 < \alpha < 1$ implica em um comportamento subdifusivo do sistema e $\alpha > 1$ em um comportamento superdifusivo [6].

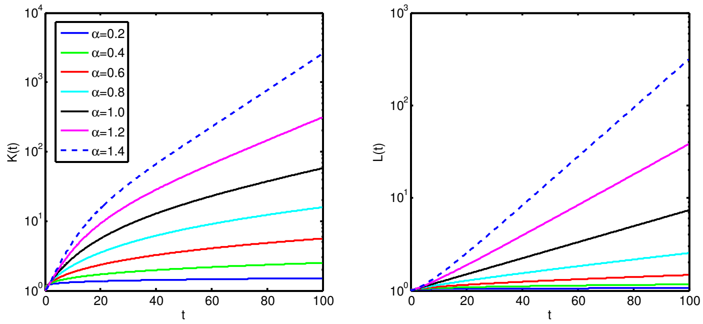

Figura 1: Evolução do estoque de capital (esquerda) e de mão-de-obra (direita).

Como é mais usual na literatura econômica, na Figura 2 apresentamos a evolução do capital *per capita* até o tempo $T = 1000$. Note que, para o conjunto de parâmetros utilizados, o estado estacionário do capital *per capita* do modelo de Solow é igual a $k_\infty = (20/7)^2 \approx 8.16$. Nesta figura podemos observar que o modelo de Solow com memória também apresenta convergência para este mesmo estado estacionário, porém apresentando velocidades de convergência diferentes do modelo sem memória: para $0 < \alpha < 1$, a convergência é mais lenta quanto menor for o valor de α; já para $\alpha > 1$, a convergência é mais rápida quanto maior for o seu valor, inclusive apresentando *overshooting* para valores maiores de α. Sendo assim, o modelo de Solow considerando o parâmetro de memória α entre 0 e 1 poderia ser utilizado para explicar as menores velocidades de convergência ao estado estacionário do capital *per capita* verificadas empiricamente.

Por fim, na Figura 3, comparamos os resultados obtidos acima com o método numérico preditor-corretor PECE para equações diferenciais fracionárias (FracPECE). Este método foi proposto em [3] e sua implementação em MATLAB pode ser encontrada em [5]. Aqui consideramos apenas $0 < \alpha \leq 1$, já que este método só apresenta convergência para esta faixa de valores de α. Como podemos ver no gráfico, o método FracPECE valida razoavelmente os resultados obtidos com o método híbrido implementado neste trabalho para estes valores de α.

5 Conclusões

Neste trabalho introduzimos efeitos de memória do tipo lei de potência no modelo de crescimento econômico de Solow, utilizando a derivada fracionária de Caputo de ordem

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0396

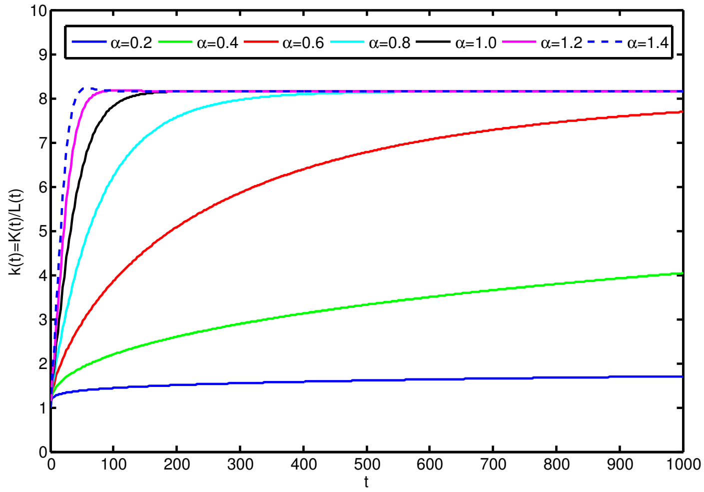

Figura 2: Evolução do capital *per capita* utilizando o método híbrido.

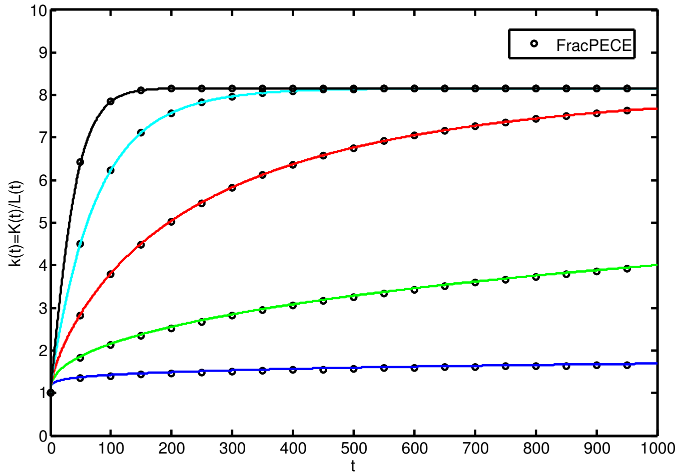

Figura 3: Comparação do método híbrido (linhas sólidas) e FracPECE para $0 < \alpha \leq 1$.

não-inteira $\alpha > 0$. Através da implementação de um método numérico híbrido mostramos que para $0 < \alpha < 1$, o efeito memória faz com que o capital *per capita* dado pelo modelo modificado convirja para seu estado estácionário com uma velocidade menor do que o modelo de Solow tradicional ($\alpha = 1$), enquanto que para $\alpha > 1$, sua introdução implica em uma convergência mais rápida. Além disso, para $0 < \alpha \leq 1$, validamos estes resultados utilizando um método preditor-corretor PECE para equações diferenciais fracionárias.

Os resultados obtidos sugerem que o modelo de Solow com efeitos de memória proposto neste trabalho, considerando α entre 0 e 1, poderia ser utilizado para explicar as

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0396

velocidades de convergência do capital *per capita* ao estado estacionário observadas na realidade, já que o modelo de Solow tradicional costuma superestimar estas velocidades. Por fim, em trabalhos futuros pretendemos estimar empiricamente valores para o parâmetro α, considerando dados de crescimento de economias de diferentes países.

Referências

[1] R. J. Barro e X. Sala-i-Martin, *Economic Growth*, 2nd edition, MIT Press, US, 2004.

[2] R.F. Camargo e E. C. de Oliveira, Cálculo Fracionário, Editora Livraria da Física, SP, 2015.

[3] K. Diethelm e A.D. Freed. The FracPECE subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order. In S. Heinzel and T. Plesser, editors, *Forschung und wissenschaftliches Rechnen 1998*, pages 57-71, 1999.

[4] A. M. A. El-Sayed, A. E. M. El-Mesiry, H. A. A. El Saka, On the fractional-order logistic equation, *Applied Mathematics Letters*, 20, pp. 817-823, 2007.

[5] R. Garrappa, Predictor-corrector PECE method for fractional differential equations (http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32918), MATLAB Central File Exchange, acessado em 2 de novembro de 2016.

[6] G. Gonçalves, M. K. Lenzi, L. S. Moraes, E. K. Lenzi, M. F. de Andrade, Difusão anômala e equações fracionárias de difusão, *Acta Scientiarum Technology*, v. 27, n. 2, pp. 123-131, July/Dec. 2005.

[7] R. Solow, A contribution to the theory of economic growth, *Quarterly Journal of Economics*, Vol LXX, 65-94, Feb 1956.

[8] T. W. Swan, Economic Growth and Capital Accumulation, *Economic Record*, 32, pp. 334-361, 1956.

[9] G. H. O. Salgado, Métodos Numéricos Para Solução de Equações Diferenciais Segundo a Derivada de Caputo, Tese de Doutorado, PPGEE/UFMG, 2015.

[10] V. V. Tarasova e V. E. Tarasov, Fractional Dynamics of Natural Growth and Memory Effect in Economics, *European Research*, 12(23), pp. 30-37, 2016.

[11] V. V. Tarasova e V. E. Tarasov, Elasticity for Economic Processes with Memory: Fractional Diferential Calculus Approach, *Fractional Differential Calculus*, Vol. 6, N. 2, pp. 219-232, 2016.

[12] V. V. Tarasova e V. E. Tarasov, Logistic Map with Memory from Economic Model, *Chaos, Solitons and Fractals*, 95, pp. 84-91, 2017.

[13] B. J. West, Exact solution to fractional logistic equation, *Physica A*, 429, pp. 103-108, 2015.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0396