Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Sobre Inclusões Dinâmicas em Escalas Temporais

Iguer Luis Domini dos Santos[1]
Departamento de Matemática, UNESP, Ilha Solteira, SP

Resumo. No presente trabalho consideramos inclusões dinâmicas em escalas temporais cujos campos vetoriais podem ser ilimitados. Então, fazendo uso de propriedades de teoria da medida e de multifunções, provamos um resultado de existência de soluções.

Palavras-chave. Inclusões Dinâmicas, Existência de Soluções, Escalas Temporais

1 Introdução

O estudo de inclusões dinâmicas em escalas temporais pode ser encontrado, por exemplo, em [1,2,4–6,9]. Uma escala temporal é um subconjunto fechado e não-vazio de números reais. Aqui usamos uma escala temporal limitada $\mathbb{T}$, onde $a = \min \mathbb{T}$ e $b = \max \mathbb{T}$ são tais que $a < b$.

Neste trabalho, nós provamos um resultado de existência de soluções para inclusões dinâmicas em escalas temporais cujos campos vetoriais podem ser ilimitados. O resultado é obtido de modo similar ao teorema [[7], Theorem 2.2]. Entretanto, diferente de [7], nós supomos que os campos vetoriais das inclusões dinâmicas são Lipschitz mensuráveis.

2 Preliminares

Conceitos e resultados básicos da teoria de escalas temporais podem ser encontrados em [9] e [10].

2.1 Integração em escalas temporais

Se $A \subset \mathbb{R}$, defina o conjunto $A_{\mathbb{T}}$ como $A_{\mathbb{T}} = A \cap \mathbb{T}$. Denote por Δ a família de subconjuntos Δ-mensuráveis de $\mathbb{T}$.

Denotamos o conjunto de funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ que são Δ-integráveis sobre E por $L_1(E)$. $L_1(E, \mathbb{R}^n)$ denotará o conjunto de funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ que são Δ-integráveis sobre E.

Denote por $\mathcal{B}^m$ a σ-Álgebra de Borel de $\mathbb{R}^m$ e por $\Delta \times \mathcal{B}^m$ a σ-Álgebra produto entre Δ e $\mathcal{B}^m$.

Os teoremas 2.1 e 2.2 dados abaixo são obtidos de modo análogo aos teoremas [[3], Théorème IV.8] e [[3], Théorème IV.9], respectivamente.

[1]iguerluis@mat.feis.unesp.br

Teorema 2.1. *$L_1([a,b)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach.*

Teorema 2.2. *Sejam $\{f_j\}$ uma sequência em $L_1([a,b)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ e $f \in L_1([a,b)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ tais que*

$$\|f_j - f\|_1 := \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \|f_j(s) - f(s)\| \Delta s \to 0.$$

Então existe uma subsequência $\{f_{j_m}\}$ satisfazendo

(i) $f_{j_m}(t) \to f(t)$ para Δ-q.t.p. $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$;

(ii) $\|f_{j_m}(t)\| \leq h(t)$, $\forall$ m e para Δ-q.t.p. $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$, onde $h \in L_1([a,b)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$.

Usando [[9], Proposition 4] obtemos o lema 2.1 abaixo.

Lema 2.1. *Considere $g \in L_1([a,b)_{\mathbb{T}})$ satisfazendo*

$$\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} g(s) \Delta s = 0$$

para cada $c, d \in \mathbb{T}$ tal que $c < d$. Então $g(t) = 0$ Δ-q.t.p. $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$.

Corolário 2.1. *Seja $v \in L_1([a,b)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} v(s) \Delta s = 0$$

para todo $t \in \mathbb{T}$. Então $v(t) = 0$ Δ-q.t.p. $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$.

2.2 Funções absolutamente contínuas em escalas temporais

A definição de uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ absolutamente contínua pode ser encontrada em [9].

Neste trabalho usaremos o teorema [[9], Theorem 5].

Uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é um arco se for absolutamente contínua.

Temos o seguinte resultado sobre funções absolutamente contínuas em escalas temporais.

Lema 2.2. *Se $v \in L_1([a,b)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, então a função $z : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ dada por*

$$z(t) = x_0 + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} v(s) \Delta s$$

é um arco. Além disso,

$$z^{\Delta}(t) = v(t) \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}}.$$

Demonstração. De [[9], Proposition 2] a função z é um arco. Do corolário 2.1 segue que

$$z^{\Delta}(t) = v(t) \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$$

e a prova está completa. □

3 Propriedades de Multifunções

Nesta seção consideramos resultados envolvendo multifunções. Tais resultados serão necessários para a obtenção de soluções para inclusões dinâmicas em escalas temporais. Os correspondentes resultados para a obtenção de soluções para inclusões diferenciais, podem ser encontrados em [8].

Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Uma multifunção $E : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser $\mathcal{F}$-mensurável se o conjunto

$$E^{-1}(V) = \{x \in \Omega : E(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

for $\mathcal{F}$-mensurável para todo conjunto compacto $V \subset \mathbb{R}^n$.

Uma multifunção E é dita ser fechada ou não-vazia quando sua imagem $E(x)$ satisfaz a requerida propriedade para cada ponto $x \in \Omega$.

Considere uma função $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que ϕ é uma Δ-função de Carathéodory se satisfizer as seguintes propriedades:

(i) para cada $t \in \mathbb{T}$, a função $x \mapsto \phi(t, x)$ é contínua.

(ii) para cada $x \in \mathbb{R}^m$, a função $t \mapsto \phi(t, x)$ é Δ-mensurável.

De modo análogo à prova da proposição [[10], Proposition 3.3], nós obtemos a seguinte proposição.

Proposição 3.1. *Seja $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção $\Delta \times \mathcal{B}^m$-mensurável e $u : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^m$ uma função Δ-mensurável. Então a multifunção $G : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ definida por*

$$G(t) = F(t, u(t))$$

é Δ-mensurável.

Temos também a seguinte proposição.

Proposição 3.2. *Considere uma Δ-função de Carathéodory $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e uma multifunção $H : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ Δ-mensurável, não-vazia e fechada. Suponha que para cada $t \in \mathbb{T}$ exista $u \in H(t)$ tal que $\phi(t, u) = 0$. Então a multifunção $G : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ dada por*

$$G(t) = \{u \in H(t) : \phi(t, u) = 0\}$$

tem uma seleção Δ-mensurável.

Considere uma multifunção $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que F satisfaz as hipóteses (H1) e (H2) se

(H1) F é uma multifunção não-vazia, fechada e $\Delta \times \mathcal{B}^n$-mensurável.

(H2) F é Lipschitz mensurável de posto k, isto é, existe uma função $k : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ em $L_1([a, b)_{\mathbb{T}})$ tal que para cada $t \in \mathbb{T}$,

$$F(t, x) \subset F(t, y) + k(t)\|y - x\|B$$

para todo x, y em $\mathbb{R}^n$, onde B é a bola unitária fechada.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0434

Note que as hipóteses (H1) e (H2) implicam que o gráfico da multifunção $F(t, .)$ (Gr $F(t, .)$) é um conjunto fechado para cada $t \in \mathbb{T}$.

Definimos a função $\rho : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ por

$$\rho(t, x, v) := \inf\{|v - y| : y \in F(t, x)\}.$$

Em analogia com [[8], Lemma 2C.3], temos o seguinte lema.

Lema 3.1. *Seja $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção satisfazendo as hipóteses (H1) e (H2). Então*

(i) a função $t \mapsto \rho(t, x, v)$ é Δ-mensurável para cada (x, v) em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

(ii) para qualquer t em $\mathbb{T}$, e quaisquer x_1, x_2, v_1, v_2 em $\mathbb{R}^n$, tem-se

$$|\rho(t, x_1, v_1) - \rho(t, x_2, v_2)| \leq k(t)\|x_1 - x_2\| + \|v_1 - v_2\|.$$

Finalmente, consideramos o lema 3.2 abaixo, que pode ser facilmente obtido da proposição 3.2 e lema 3.1.

Lema 3.2. *Seja $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção satisfazendo as hipóteses (H1) e (H2). Se $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é um arco, então a multifunção*

$$t \rightsquigarrow \{u \in F(t, x(t)) : \|u - x^\Delta(t)\| - \rho(t, x(t), x^\Delta(t)) = 0\}$$

tem uma seleção Δ-mensurável.

4 Resultado Principal

Aqui nós obtemos a existência de soluções para inclusões dinâmicas em escalas temporais cujos campos vetoriais podem ser ilimitados.

Considere a inclusão dinâmica

$$x^\Delta \in F(t, x) \tag{1}$$

com a condição inicial

$$x(a) = x_0. \tag{2}$$

O teorema 4.1 afirma a existência de pelo menos uma solução para as equações (1) e (2) em algum intervalo $[a, \tau)_\mathbb{T}$.

A prova do lema 4.1 dado abaixo segue as mesmas linhas da prova do lema [[7], Lemma 2.1].

Lema 4.1. *Considere o seguinte sistema recursivo de desigualdades:*

$$r_{n+1} \leq \xi_n r_n; \quad \xi_n = \kappa; \quad r_n \geq 0,$$

onde κ é um parâmetro não-negativo. Suponha que $\xi_1 \leq \lambda$ para algum $\lambda \in (0, 1)$. Seja (r_n, ξ_n) uma solução correspondente do sistema recursivo. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \leq \frac{r_1}{1 - \lambda}.$$

Teorema 4.1. *Seja* $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ *uma multifunção que satisfaz as hipóteses (H1) e (H2). Considere um arco* $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $x(a) = x_0$. *Suponha que a função* $t \mapsto \rho(t, x(t), x^\Delta(t))$ *seja Lebesgue* Δ*-integrável sobre* $[a, b)_\mathbb{T}$ *e defina*

$$r_1(t) = \int_{[a,t)_\mathbb{T}} \rho(s, x(s), x^\Delta(s))\Delta s$$

e

$$\kappa(t) = \int_{[a,t)_\mathbb{T}} k(s)\Delta s, \qquad \xi_1(t) = \kappa(t).$$

Suponha que $\sigma(a) = a$. *Seja* $\tau \in (a, b]_\mathbb{T}$ *tal que* $\kappa = \kappa(\tau) \leq \lambda$ *para algum* $\lambda \in (0, 1)$. *Então existe pelo menos uma solução* $y(t)$ *para as equações* (1) *e* (2) *sobre* $[a, \tau)_\mathbb{T}$. *Além disso,*

$$\int_{[a,\tau)_\mathbb{T}} \|x^\Delta(s) - y^\Delta(s)\|\Delta s \leq \frac{r_1}{1-\lambda}. \tag{3}$$

Demonstração. Primeiro nós construímos indutivamente uma sequência $\{x_n\}$ de arcos tal que $\|x_n - y\|_\infty \to 0$ e $\|x_n^\Delta - y^\Delta\|_1 \to 0$, onde $y(t)$ é uma solução desejada. Sejam $x_0(t) = x(t)$ e $v_0(t) = x^\Delta(t)$. Se x_i e v_i já foram determinados para $i = 0, ..., n$, então nós definimos

$$r_{n+1}(t) = \int_{[a,t)_\mathbb{T}} \rho(s, x_n(s), v_n(s))\Delta s; \quad \xi_{n+1}(t) = \kappa(t).$$

Já x_{n+1} e v_{n+1} são determinados como segue:

$$v_{n+1}(t) \in F(t, x_n(t)), \quad \|v_{n+1}(t) - v_n(t)\| = \rho(t, x_n(t), v_n(t))$$

e

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{[a,t)_\mathbb{T}} v_{n+1}(s)\Delta s.$$

Por (H2), para cada $n \geq 1$ temos

$$\begin{aligned}
&\left\|x_{n+1}^\Delta(t) - x_n^\Delta(t)\right\| = \left\|v_{n+1}(t) - v_n(t)\right\| = \rho(t, x_n(t), v_n(t)) \\
&\leq k(t)\left\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\right\| = k(t)\left\|\int_{[a,t)_\mathbb{T}} \Big(v_n(s) - v_{n-1}(s)\Big)\Delta s\right\| \\
&\leq k(t)\int_{[a,t)_\mathbb{T}} \left\|v_n(s) - v_{n-1}(s)\right\|\Delta s = k(t)\int_{[a,t)_\mathbb{T}} \rho(s, x_{n-1}(s), v_{n-1}(s))\Delta s \\
&= k(t)r_n(t) \leq r_n(\tau)k(t)
\end{aligned}$$

para Δ-q.t.p. $t \in [a, \tau)_\mathbb{T}$. Integrando a desigualdade, obtemos

$$r_{n+1}(t) \leq r_n(\tau)\int_{[a,t)_\mathbb{T}} k(s)\Delta s \leq r_n(\tau)\int_{[a,\tau)_\mathbb{T}} k(s)\Delta s = r_n(\tau)\kappa(\tau).$$

Se $r_n = r_n(\tau)$ e $\xi_n = \xi_n(\tau) = \kappa$, obtemos

$$r_{n+1} \leq r_n\kappa.$$

Usando o lema 4.1 nós conluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \leq \frac{r_1}{1-\lambda}.$$

Sendo

$$r_{n+1} = \int_{[a,\tau)_{\mathbb{T}}} \|x_{n+1}^{\Delta}(s) - x_n^{\Delta}(s)\| \Delta s$$

segue que $\{x_n^{\Delta}\}$ é uma sequência de Cauchy em $L_1([a,\tau)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$. Então existe $u \in L_1([a,\tau)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\|x_n^{\Delta} - u\|_1 \to 0$. Assim, se

$$y(t) = x_0 + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} u(s) \Delta s$$

temos que

$$\begin{aligned} \Big\| x_n(t) - y(t) \Big\| &= \Big\| \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} \Big(x_n^{\Delta}(s) - u(s) \Big) \Delta s \Big\| \\ &\leq \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} \Big\| x_n^{\Delta}(s) - u(s) \Big\| \Delta s \leq \Big\| x_n^{\Delta} - u \Big\|_1 \end{aligned}$$

e dessa forma

$$\Big\| x_n - y \Big\|_{\infty} \leq \Big\| x_n^{\Delta} - u \Big\|_1.$$

Portanto $\|x_n - y\|_{\infty} \to 0$.

Do teorema 2.2 existe uma subsequência de $\{x_n^{\Delta}\}$, não reindexamos, tal que $x_n^{\Delta}(t) \to u(t)$ para Δ-q.t.p. $t \in [a,\tau)_{\mathbb{T}}$.

Tome $t \in [a,\tau)_{\mathbb{T}}$ tal que $y^{\Delta}(t) = u(t)$, $x_{n+1}^{\Delta}(t) = v_{n+1}(t)$ e $x_n^{\Delta}(t) \to u(t)$. Como

$$(x_n(t), x_{n+1}^{\Delta}(t)) \in \text{ Gr } F(t,.)$$

e Gr $F(t,.)$ é um conjunto fechado, segue que

$$(y(t), y^{\Delta}(t)) \in \text{ Gr } F(t,.).$$

Assim $y(t)$ é uma solução para as equações (1) e (2) em $[a,\tau)_{\mathbb{T}}$.

Finalmente, nós obtemos a estimativa dada em (3). Para cada $n \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \Big\| x_{n+1}^{\Delta} - x^{\Delta} \Big\|_1 &\leq \Big\| x_{n+1}^{\Delta} - x_n^{\Delta} \Big\|_1 + \cdots + \Big\| x_1^{\Delta} - x^{\Delta} \Big\|_1 \\ &= r_{n+1} + \cdots + r_1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} r_i \leq \frac{r_1}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Temos também que

$$\Big| \Big\| x_{n+1}^{\Delta} - x^{\Delta} \Big\|_1 - \Big\| y^{\Delta} - x^{\Delta} \Big\|_1 \Big| \leq \Big\| x_{n+1}^{\Delta} - y^{\Delta} \Big\|_1 = \Big\| x_{n+1}^{\Delta} - u \Big\|_1$$

e então $\|x_{n+1}^{\Delta} - x^{\Delta}\|_1 \to \|y^{\Delta} - x^{\Delta}\|_1$. Portanto nós obtemos (3). □

Referências

[1] F. M. Atici and D. C. Biles. First order dynamic inclusions on time scales, *J. Math. Anal. Appl.*, 292:222–237, 2004.

[2] M. Bohner and C. C. Tisdell. Second order dynamic inclusions, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 12:36–45, 2005.

[3] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[4] Y. K. Chang and W. T. Li. Existence results for dynamic inclusions on time scales with nonlocal initial conditions, *Comput. Math. Appl.*, 53:12–20, 2007.

[5] M. Frigon and H. Gilbert. Systems of first order inclusions on time scales, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 37:147–163, 2011.

[6] E. Girejko and D. F. M. Torres. The existence of solutions for dynamic inclusions on time scales via duality, *Appl. Math. Lett.*, 25:1632–1637, 2012.

[7] A. Ioffe. Existence and relaxation theorems for unbounded differential inclusions, *J. Convex Anal.*, 13:353–362, 2006.

[8] P. D. Loewen. *Optimal control via nonsmooth analysis.* American Mathematical Society, Providence, 1993.

[9] I. L. D. Santos and G. N. Silva. Absolute continuity and existence of solutions to dynamic inclusions in time scales, *Math. Ann.*, 356:373–399, 2013.

[10] I. L. D. Santos and G. N. Silva. Filippov's selection theorem and the existence of solutions for optimal control problems in time scales, *Comput. Appl. Math.*, 33:223–241, 2014.

