Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Revisão da solução analítica/numérica da equação de Grad-Shafranov

Arian Ojeda González[1]

Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento da Universidade do Vale do Paraíba - UNIVAP, São José dos Campos, SP.

Resumo. Neste trabalho apresenta-se a solução analítica da equação de Grad-Shafranov (GS), importante ferramenta nos estudos de tubos de fluxo magnético no ambiente geoespacial. A equação de GS pode ser resolvida numericamente como um problema de Cauchy, considerando que a equação diferencial estará sujeita a condições iniciais. Se um satélite mede esses parâmetros iniciais, a equação de GS será resolvida, obtendo como resultado a reconstrução da estrutura de plasma na região entorno do satélite. Uma proposta para melhorar a solução numérica da equação de GS também será apresentada. Os tópicos abordados já foram publicadas pelo autor e colaboradores em Braz J Phys (2015) 45: 493, e Braz J Phys (2016) 46: 408.

Palavras-chave. Equação de Grad-Shafranov, Problema de Cauchy, Métodos Numéricos, Lâminas de Corrente.

1 Introdução

A lei de Ampére-Maxwell ou Lei de Ampére Generalizada é dada por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{1}$$

Considerando que não há dependência temporal nas grandezas físicas consideradas e substituindo a relação vetorial $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$ na Eq. (1), temos:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}') = \nabla^2 \vec{A}' - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' \right) = -\mu_0 \vec{J}. \tag{2}$$

Supondo que $\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' \right) = 0$, a Eq. (2) pode ser escrita como o seguinte sistema de três equações diferenciais não-homogêneas de segunda ordem,

$$\begin{cases} \nabla^2 A'_x &= -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A'_y &= -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A'_z &= -\mu_0 J_z. \end{cases} \tag{3}$$

[1]ojeda.gonzalez.a@gmail.com

A equação de Grad-Shafranov (GS) define-se a partir da componente z da Eq. (3). Antes de iniciar o desenvolvimento matemático da equação de GS, é importante mencionar que o eixo z é invariante, ou seja, as derivadas parciais em relação a z são iguais a zero. Segundo [3], considerar um eixo invariante faz desnecessário utilizar o calibre de Coulomb na Eq. (2). Logo, a equação de GS será:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu_0 J_z. \tag{4}$$

A Eq. (4) terá diferentes soluções de acordo com o modelo escolhido para J_z. Isso vai nos permitir estudar as lâminas de corrente, assim como o comportamento de outras grandezas físicas relacionadas com J_z. As lâminas de corrente estão fortemente relacionadas a um outro fenômeno importante na transferência de energia e momento de um sistema físico para outro, tal fenômeno é chamado de reconexão magnética.

2 Solução analítica

Com o intuito de procurar uma solução analítica da equação de GS, utiliza-se inicialmente a teoria cinética de plasmas, e as equações de Vlasov-Maxwell para posterior resolução. Ou seja,

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}} \cdot \nabla f_j + \frac{1}{m_j}[\vec{F}_{ext} + q_j(\vec{E}_i + \vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}_i)] \cdot \nabla_\upsilon f_j = 0, \tag{5}$$

$$\nabla \times \vec{B}_i = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t} \right), \tag{6}$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_j q_j n_j(\vec{r}, t) = \sum_j q_j \int_\upsilon f_j(\vec{r}, \vec{\mathrm{v}}, t) d^3\upsilon, \tag{7}$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_j q_j n_j(\vec{r}, t)\vec{u}_j(\vec{r}, t) = \sum_j q_j \int_\upsilon \vec{\mathrm{v}} f_j(\vec{r}, \vec{\mathrm{v}}, t) d^3\upsilon \tag{8}$$

$$\text{onde, } \nabla_\upsilon = \hat{x}\frac{\partial}{\partial \upsilon_x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial \upsilon_y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial \upsilon_z}, \tag{9}$$

f_j é chamada de gaussiana ou de normal.

O sistema de equações de Vlasov-Maxwell será utilizado para estudar um plasma confinado por um campo magnético. Considerando $F_{ext} = 0$, a condição de plasma confinado ($E_i = 0$), e que f_j não depende do tempo, as considerações anteriores simplificam o problema para um caso magnetohidrodinâmico (MHD) ideal:

$$[\vec{\mathrm{v}} \cdot \nabla + (q_j/m_j)(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B_i}) \cdot (\partial/\partial\vec{\mathrm{v}})] f_j(x, y, \vec{\mathrm{v}}) = 0, \tag{10}$$

$$\nabla \times B_{iz}\hat{z} = \mu_0 J_z \hat{z}, \tag{11}$$

$$J_z(x, y) = \sum_j q_j \int \vec{\mathrm{v}} f_j(x, y, \vec{\mathrm{v}}) d\vec{\mathrm{v}}, \tag{12}$$

$$f_j(P_j, H_j) = N_j e^{-(H_j - V_j P_j + m_j V_j^2/2)/T_j}, \tag{13}$$

$$(\text{momento canônico})\ P_j = m_j v_z + q_j A_{iz}(x, y), \tag{14}$$

$$(\text{Hamiltoniano total})\ H_j = m_j v^2/2. \tag{15}$$

Na segunda equação do sistema anterior está inclusa a Eq. (3). Ela pode ser escrita da seguinte maneira (de agora em diante $A_{iz} = A_i$):

$$\nabla^2 A_i = -\left(\frac{\partial B_{iy}(x,\, y)}{\partial x} - \frac{\partial B_{ix}(x,\, y)}{\partial y}\right) = -\mu_0 J_z(x, y), \tag{16}$$

com a função gaussiana:

$$f_j(x,\, y, \vec{v}) = N_j \exp\left[-\frac{m_j}{2T_j}\left(v_x^2 + v_y^2 + (v_z - V_j)^2 - \frac{2q_j V_j A_i(x,\, y)}{m_j}\right)\right]. \tag{17}$$

Substituindo as Eqs. (17) e (12) em (16), e resolvendo três integrais, chega-se à uma equação mais simples:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 A_i = &- \mu_0 \sum_j N_j q_j e^{\frac{q_j V_j A_i(x,\, y)}{T_j}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp{(-\frac{m_j v_x^2}{2T_j})} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp{(-\frac{m_j v_y^2}{2T_j})} dv_y, \\
&\int_{-\infty}^{\infty} v_z \exp{(-\frac{m_j (v_z - V_j)^2}{2T_j})} dv_z, \\
\nabla^2 A_i = &-\mu_0 \sum_j q_j n_{0j} V_j \exp{(\frac{q_j V_j A_i}{T_j})}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Uma importante propriedade do plasma é que macroscopicamente ele é eletricamente neutro. Neste contexto, a expressão para calcular a densidade do plasma é dada por:

$$\begin{aligned}
\rho(x, y) &= \sum_j q_j n_j(x, y) = \sum_j q_j n_{0j} \exp{(q_j V_j A_i(x,\, y)/T_j)}, \\
&= -q_e n_{0e} \exp{(-q_e V_e A_i(x,\, y)/T_e)} + q_i n_{0i} \exp{(q_i V_i A_i(x,\, y)/T_i)}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Logo, $\rho(x, y) = 0$, quando são satisfeitas as seguintes condições: $|q_e| = |q_i| = q$, $n_{0e} = n_{0i} = n_0$, e $V_i/T_i = -V_e/T_e$. Substituindo essas considerações na Eq. (18), temos:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 A_i &= -\mu_0 q n_0 \left(\frac{V_i T_i}{T_i} - \frac{V_e T_e}{T_e}\right) \exp{(\frac{qV_i}{T_i} A_i)}, \\
&= -2\mu_0 n_0 (T_e + T_i) \frac{qV_i}{2T_i} \exp{(\frac{qV_i}{T_i} A_i)}.
\end{aligned}$$

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0428

Em seguida, introduzem-se três constantes: $B_{i0}^2 = 2\mu_0 n_0(T_e + T_i)$ (magnitude do campo magnético assintótico), $L = 2T_i/(qB_{i0}V_i)$ (comprimento característico associado à lâmina de corrente), e $\Psi = -A_i/(LB_{i0})$ (potencial vetor normalizado). A equação fica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(L^2 \frac{-A_i}{LB_{i0}}\right) = e^{-2\Psi},$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial (x/L)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (y/L)^2}\right)\Psi = e^{-2\Psi},$$

e uma mudança de variáveis ($X = x/L$, $Y = y/L$) é feita para transformá-la na equação de GS [6, 8]:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = e^{-2\Psi}. \tag{20}$$

No trabalho de [7], a Eq. (20) foi resolvida no contexto da teoria de variáveis complexas. Ele propôs uma função geradora ($g(\xi)$ com $\xi = X + \iota\, Y$) para obter uma variedade de modelos de lâminas de corrente. A solução em função de $g(\xi)$ é a seguinte:

$$e^{-2\Psi} = \frac{4|g(\xi)'|^2}{(1 + |g(\xi)|^2)^2}. \tag{21}$$

Uma solução da Eq. (21), com aplicação na Geofísica Espacial, é a solução de [1], sendo $g(\xi) = f + \sqrt{1+f^2}e^{\iota\xi}$ e $\Psi = \ln\left(f\cos X + \sqrt{1+f^2}\cosh Y\right)$. Esta solução é importante para comparar com a solução numérica [2, 4].

3 Solução Numérica

A solução numérica se inicia com a expansão em série de Taylor em torno do ponto $y = y_0$, considerado que no primeiro passo, $y_0 = 0$. É necessário construir uma grade retangular para obter a solução numérica. Neste caso, utiliza-se a seguinte grade: $0 \leq x \leq 51$ com $\Delta x = 51/101$, e $-5 \leq y \leq 5$ com $\Delta y = 0.1 \times \Delta x$ [2, 4]. A solução tem por objetivo estudar a maneira como o valor de $A_z(x, y_0 + \Delta y)$ varia, quando $\Delta y = y - y_0$ é uma quantidade muito pequena. Pode-se dizer que a obtenção da solução numérica se resume na realização de n passos como segue:

- Passo 1: Série de Taylor de segunda ordem,

$$A(x, \pm\Delta y) \cong A(x, 0) \pm \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{x,0} \Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{x,0} (\Delta y)^2, \tag{22}$$

  e conhecido o valor de $A(x, \pm\Delta y)$, onde $y = 0 \pm \Delta y$, pode-se calcular o valor de $A(x, \pm 2\Delta y)$, com $y = \pm\Delta y \pm \Delta y$;

- Passo 2:

$$A(x, \pm 2\Delta y) \cong A(x, \pm\Delta y) \pm \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{x,\pm\Delta y} \Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{x,\pm\Delta y} (\Delta y)^2; \tag{23}$$

- Passo n: $y = \pm(n-1)\Delta y \pm \Delta y$,

$$A(x, \pm n\Delta y) \cong A(x, \pm(n-1)\Delta y) \pm \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{x,\pm(n-1)\Delta y} \Delta y + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{x,\pm(n-1)\Delta y} (\Delta y)^2. \tag{24}$$

No Passo 1, supondo que os dados de um satélite são conhecidos, temos informação das componentes do campo magnético, da densidade e da temperatura do plasma. Também é possível calcular a pressão do plasma: $p = k_0(n_e + n_p)(T_e + T_p)/2$, sendo k_0 a constante de Boltzmann. A solução do problema depende das condições iniciais, ou seja, nosso problema consiste num Problema de Cauchy ou Problema de Valor Inicial (PVI). As grandezas $A(x, 0)$ e $(\partial A/\partial y)_{x,0}$ são obtidas como segue:

$$A(x,0) = -\int_0^x B_y(x'', 0)dx''(\text{resolve-se pelo método dos trapézios}),$$
$$(\partial A/\partial y)_{x,0} = B_x(x, 0).$$

Utilizando o modelo de Fadeev (com $\theta = 5.7°$) [1],

$$A(x, y, \theta) = \ln\{f\cos[\tilde{x}(x, y, \theta)] + \sqrt{1+f^2}\cosh[\tilde{y}(x, y, \theta)]\}, \tag{25}$$

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{f\sin[\tilde{x}]\sin\theta + \sqrt{1+f^2}\sinh[\tilde{y}]\cos\theta}{f\cos[\tilde{x}] + \sqrt{1+f^2}\cosh[\tilde{y}]}, \tag{26}$$

$$B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{f\sin[\tilde{x}]\cos\theta - \sqrt{1+f^2}\sinh[\tilde{y}]\sin\theta}{f\cos[\tilde{x}] + \sqrt{1+f^2}\cosh[\tilde{y}]}. \tag{27}$$

Em resumo, no Passo 1 foram obtidos os dois primeiros termos da direita da Eq. (22). O terceiro termo da Eq. (22) é calculado a partir da equação de GS:

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{x,0} = -\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{x,0} - \mu_0 \frac{dP_t(A(x,0))}{dA}. \tag{28}$$

O primeiro termo da direita da equação de GS calcula-se a partir de um esquema de diferenças finitas de segunda ordem (ver Apendice em [2]),

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_i = \frac{2A_i - 5A_{i\pm1} + 4A_{i\pm2} - A_{i\pm3}}{(\Delta x)^2} + \\ + O(\Delta x^2) \text{ (progressiva(+) e regressiva(-))}, \tag{29}$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_i = \frac{A_{i+1} - 2A_i + A_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \\ + O(\Delta x^2) \text{ (central)}. \tag{30}$$

O método para obter o segundo termo da direita da equação de GS é descrito a seguir:

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0428

- Passo 1: Calcula-se a função:

$$P_t(x,0) = p + \frac{B_z^2}{2\mu_0},$$

sendo que,

$$p = \frac{1}{3\mu_0(f\cos[\tilde{x}] + \sqrt{1+f^2}\cosh[\tilde{y}])^2}, \text{ e } B_z = \frac{1}{\sqrt{3}(f\cos[\tilde{x}] + \sqrt{1+f^2}\cosh[\tilde{y}])}. \tag{31}$$

- Passo 2: A partir do plot de $P_t(x,0)$ $vs.$ $A(x,0)$ é feito um ajuste exponencial, sendo que, $P_t(A) = 0.398\exp(-2A)$.

- Passo 3: Com a função $P_t(A)$ pode-se obter $\left[\frac{dP_t}{dA}\right]_{(x;0)}$. A função $P_t(A)$ se mantém constante para qualquer Δy ao longo da integração numérica.

Neste ponto, o valor de $A(x,\pm\Delta y)$ passa a ser conhecido:

$$A(x,\pm\Delta y) \cong A(x,0) \pm \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{x,0}\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{x,0}(\Delta y)^2.$$

Aqui é importante mencionar que o terceiro termo da Eq. (22) pode causar crescimentos exponenciais, podendo haver divergencias na solução numérica [4]. Isso significa que é necessário utilizar um filtro, descrito a seguir, (para mais detalhes, ver [4]) para eliminar os resultados com tendências exponenciais.

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= \omega(y)A_1 + \frac{1}{2}(1-\omega(y))(A_1 + A_2),\\
\bar{A}_i &= \omega(y)A_i + \frac{1}{2}(1-\omega(y))(A_{i-1} + A_{i+1}) \text{ e}\\
\bar{A}_N &= \omega(y)A_N + \frac{1}{2}(1-\omega(y))(A_N + A_N), \text{ sendo que,}
\end{aligned}$$

$$\omega(y) = \begin{cases} 1 & \text{para } \ y = 0,\\ 1 - \frac{1}{3}\left|\frac{y}{y_{max}}\right| & \text{para } \ \text{outro},\\ 2/3 & \text{para } \ y = |y_{max}|. \end{cases} \tag{32}$$

Ainda, antes de passar para o segundo passo do método numérico, é preciso calcular $B_y(x,\pm\Delta y)$ e $B_x(x,\pm\Delta y)$. Usando diferenças finitas:

$$B_y(x,\pm\Delta y) = -(\partial A/\partial x)_{x,\pm\Delta y} \text{ onde,} \tag{33}$$

$$(\partial A/\partial x)_i = (A_{i+1} - A_{i-1})/(2\Delta x) + O(\Delta x^2). \tag{34}$$

O valor de $B_x(x,\pm\Delta y)$ é obtido através da expansão em série de Taylor de primeira ordem:

$$B_x(x,\pm\Delta y) \cong B_x(x,0) \pm (\partial B_x/\partial y)_{x,0}\Delta y, \tag{35}$$

$$\cong B_x(x,0) \pm (\partial^2 A/\partial y^2)_{x,0}\Delta y. \tag{36}$$

Desse modo, é possível prosseguir para o segundo passo.

A maior contribuição de [2] foi a proposta de fazer a filtragem de $B_x(x,\pm\Delta y)$ no final de cada passo da solução numérica. [4] e artigos posteriores não fizeram a filtragem.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0428

4 Conclusões

No desenvolvimento do método, o campo magnético considerado é $2.5-D$. A condição de invariância do campo magnético em um eixo ($\partial/\partial z = 0$), permite o descarte do calibre de Coulomb. É necessário fazer a filtragem de $B_x(x, \pm n\Delta y)$ durante a implementação do método numérico. Assim, diminui o erro nas aproximações numéricas feitas nas grandezas físicas envolvidas no problema.

Agradecimentos

A. O. G. agradece a colaboração de Dr. Odim Mendes, Dra. Margarete Oliveira Domingues, Dr. Alan Prestes, MSc. Antonio Nilson Laurindo Sousa e Dra. Magda Kaibara. Também agradece a Rosemeire Aparecida Rosa Oliveira pela revisão do texto. O autor agradece a Univap pelo apoio financeiro.

Referências

[1] V. Fadeev, I. Kvabtskhava, N. Komarov, Self-focusing of local plasma currents, *Nucl. Fusion* 5(3): 202–209, 1965.

[2] A. O. González, M. O. Domingues, O. Mendes, et al, Grad-Shafranov reconstruction: Overview and improvement of the numerical solution used in Space Physics, *Braz. J. Phys.*, 45(5): 493–509, 2015. DOI: 10.1007/s13538-015-0342-y.

[3] A. O. González, A. Prestes, A. Nilson Laurindo Sousa, Discussion about the magnetic field dimensionality, invariant axis condition, and Coulomb gauge to solve the Grad-Shafranov equation, *Braz. J. Phys.*, 46(4): 408–414, 2016. DOI: 10.1007/s13538-016-0422-7.

[4] L.-N. Hau, B. U. Ö. Sonnerup, Two-dimensional coherent structures in the magnetopause: Recovery of static equilibria from single-spacecraft data, *J. Geophys. Res.*, 104(A4): 6899–6917, 1999. DOI: 10.1029/1999JA900002.

[5] E. G. Harris, On a plasma sheath separatin regions of oppositely directed magnetic field, *Nuovo Cim.,* 23, 115–121, 1962. DOI: 10.1007/BF02733547.

[6] J. Kan, Non-linear tearing structures in equilibrium current sheet, *Planet. Space Sci.*, 27(4): 351–354, 1979. DOI: 10.1016/0032-0633(79)90112-0.

[7] G. W. Walker, Some problems illustrating the forms of nebulae, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, Volume 91, 1915. DOI: 10.1098/rspa.1915.0032.

[8] P. H. Yoon, A. T. Y. Lui, A class of exact two-dimensional kinetic current sheet equilibria, *J. Geophys. Res.*, 110(A1): A01202, 2005. DOI: 10.1029/2003JA010308.

