Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Suporte de grafos unicíclicos

Maikon Machado Toledo[1]
Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS, Porto Alegre, RS
Luiz Emilio Allem[2]
Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo. Neste trabalho obtemos uma caracterização dos grafos unicíclicos singulares através do suporte de suas árvores pendentes. Além disso, mostramos que o suporte de algumas árvores pendentes de um grafo G unicíclico do tipo I está contido no suporte de G.

Palavras-chave. Grafos, nulidade, suporte, emparelhamento.

1 Introdução

Neste trabalho estudamos o suporte de grafos unicíclicos. O suporte de um grafo é um subconjunto de vértices do grafo tal que pelo menos uma de suas respectivas coordenadas dos autovetores da base do espaço nulo da matriz de adjacência é diferente de zero. O estudo do suporte de grafo é muito importante, pois ele nos fornece informações sobre o grafo. Por exemplo, os autores do artigo [3] mostram que o suporte de uma árvore é sempre um conjunto independente e em algumas classes de árvores o suporte é um conjunto independente de cardinalidade máxima.

Nessa ótica, nos propomos a estudar quais características podemos obter de um grafo unicíclico através do seu suporte. Note que uma caracterização dos grafos unicíclicos singulares é muito importante, pois é nesta classe de grafos unicíclicos que o espaço nulo da matriz de adjacência é não trivial, por consequência, é nesta classe que o suporte é não vazio e toda a teoria de suporte é útil. Em [4] há uma caracterização dos grafos unicíclicos singulares. Em nosso trabalho mostramos uma caracterização alternativa dos grafos unicíclicos singulares através do suporte de suas árvores pendentes. Mostramos também que para verificar se um grafo unicíclico é do tipo I ou II basta averiguarmos se o vértice de intersecção da árvore pendente com o ciclo do grafo unicíclico está ou não no suporte desta árvore pendente. Além disso, mostramos que o suporte de algumas árvores pendentes de um grafo G unicíclico do tipo I está contido no suporte de G.

2 Definições e notações iniciais

Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices, com $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. A matriz de adjacência de G, denotada por $A(G)$, é a matriz quadrada de ordem n cujas entradas a_{ij}

[1]maikon.toledo@ufrgs.br
[2]emilio.allem@ufrgs.br

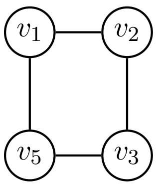
são:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E; \\ 0, & \text{se } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

A nulidade de um grafo G, denotada por $\eta(G)$, é a nulidade de sua matriz de adjacência $A(G)$, ou seja, é a multiplicade de zero como autovalor de $A(G)$. Denote por ε_λ o autoespaço de $A(G)$ associado a λ, ou seja, $\varepsilon_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : A(G)x = \lambda x\}$. O autoespaço associado ao autovalor zero (ε_0) é o foco do nosso trabalho e denotaremos por $\mathcal{N}(G)$.

A Figura 1 exibe o ciclo C_4 e sua matriz de adjacência. O ciclo C_4 tem nulidade 2, pois zero é um autovalor de multiplicidade 2 da matriz $A(C_4)$.

Exemplo



C_4

$$A(C_4) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 1: Ciclo C_4 e sua matriz de adjacência.

Definição 2.1. *Um emparelhamento M de um grafo G é um conjunto de arestas de G tal que quaisquer duas arestas em M não possuem vértices em comum. Um vértice de G é dito saturado por M se existe uma aresta de M que incide neste vértice, caso contrário é dito não saturado por M. Além disso, um emparelhamento é dito perfeito se satura todos os vértices de G.*

Na Figura 2, a árvore à esquerda tem emparelhamento dado por $\{\{v_1, v_3\}, \{v_5, v_6\}\}$ e a árvore à direita tem emparelhamento perfeito dado por $\{\{v_7, v_9\}, \{v_8, v_{10}\}, \{v_{11}, v_{14}\}, \{v_{12}, v_{13}\}\}$.

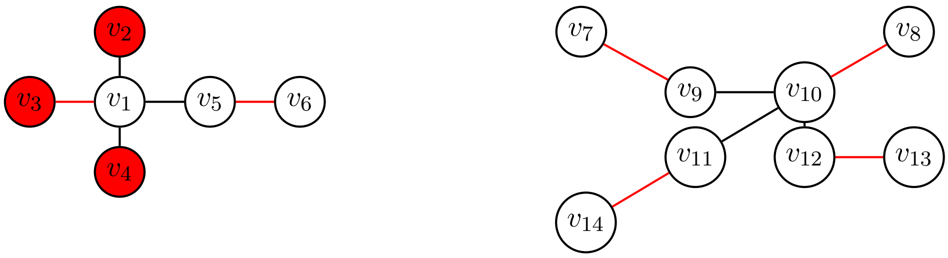


Figura 2: Emparelhamento e emparelhamento perfeito.

Denote por $EG(G)$ o conjunto de todos vértices não saturados por algum emparelhamento de cardinalidade máxima em G.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0438

Definição 2.2. *Um grafo G é dito não singular se $A(G)$ for não singular, ou, equivalentemente, se $\eta(G) = 0$. Caso contrário, o grafo G é chamado de singular.*

O Teorema a seguir o caracteriza totalmente as árvores singulares e é usado na demonstração dos teoremas de caraterização dos grafos unicíclicos singulares e não sigulares.

Teorema 2.1. *[1] T é uma árvore não singular se e somente se T tem um emparelhamento perfeito.*

Como podemos ver na Figura 2, a árvore à direita é uma árvore não singular, pois possui emparelhamento perfeito.

3 Suporte

Nesta seção introduzimos o conceito de suporte de um grafo.

Definição 3.1. *[3] Sejam G um grafo de ordem n e x um vetor do $\mathbb{R}^n$. O suporte de x em G é o conjunto abaixo $Supp_G(x) = \{v \in V(G) : x_v \neq 0\}$.*
Seja S um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, então o suporte de S em G é $Supp_G(S) = \bigcup_{v \in S} Supp_G(x)$.

Considere T a árvore à esquerda da Figura 2, e segue o conjunto de vetores abaixo:
$S = \{(0, 1, 0, -1, 0, 0)^t, (0, 0, 1, -1, 0, 0)^t\}$. Logo temos que $Supp_T(S) = \{v_2, v_3, v_4\}$.

O resultado a seguir nos mostra que para obtermos o suporte de um autoespaço de $A(G)$ basta analisarmos as coordenadas dos vetores da base deste autoespaço.

Lema 3.1. *[3] Dado um grafo G, e um autovalor λ de $A(G)$. Seja $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_k\}$ uma base de ε_λ, então $Supp_G(\varepsilon_\lambda) = Supp_G(\mathcal{B})$.*

Teorema 3.1. *[3] Se T uma árvore, então $EG(T) = Supp(T)$.*

Neste trabalho estamos interessados no suporte do espaço nulo de $A(G)$, ou seja, nosso foco é o $Supp_G(\mathcal{N}(G))$, que para facilitar denotaremos por $Supp(G)$.

4 Grafos unicíclicos não singulares

Nesta seção apresentaremos nossas primeiras contribuições, a mais importante delas é uma caracterização dos grafos unicíclicos não singulares através do suporte de suas árvores pendentes. O problema de caracterização de grafos singulares e não singulares está totalmente caracterizado para o caso em que $G = C_n$. O Teorema 4.1 exibe uma boa caracterização para este caso. Por este fato, daqui em diante consideraremos G um grafo unicíclico com $G \neq C_n$.

Teorema 4.1. *[5] Seja $G = C_n$. Então $\eta(G) = 0$ se somente se $n \neq 4k$, com $k \in \mathbb{N}$.*

Seja G um grafo unicíclico e C o ciclo de G. Para cada $v \in V(C)$, denote por $G\{v\}$ a árvore pendente, que é o maior subgrafo induzido de G que é uma árvore e cuja interseção com o ciclo C é o único vértice v. Observe que G pode ser obtido, identificando cada vértice v do ciclo C com o vértice v de sua árvore pendente $G\{v\}$. A Figura 3 exibe um grafo unicíclico G com suas árvores pendentes $G\{v_1\}$, $G\{v_2\}$ e $G\{v_3\}$.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0438

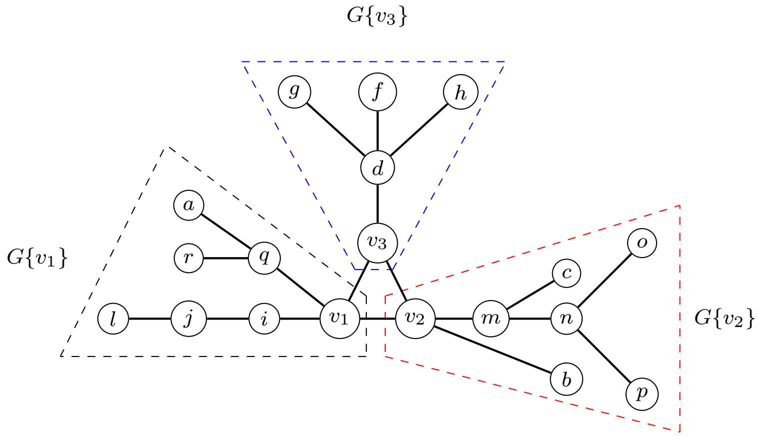


Figura 3: Grafo unicíclico e suas árvores pendentes.

Definição 4.1. *[2] O grafo unicíclico G é dito do tipo I se existe um vértice v no ciclo de G tal que v é sempre saturado por qualquer emparelhamento máximo em $G\{v\}$, caso contrário, G é dito do tipo II.*

O grafo unicíclico Figura 3 é do tipo I, note que o vértice v_1 é sempre saturado por qualquer emparelhamento máximo em $G\{v_1\}$. De fato, os emparelhamentos de cardinalidade máxima em $G\{v_1\}$ são $\{\{a, q\}, \{v_1, i\}, \{j, l\}\}$ e $\{\{r, q\}, \{v_1, i\}, \{j, l\}\}$ e ambos saturam v_1. Já o grafo unicíclico da Figura 4 é do tipo II, pois nas suas árvores pendentes $G\{v_4\}$, $G\{v_5\}$ e $G\{v_6\}$ encontramos emparelhamentos de cardinalidade máxima que não saturam v_4, v_5 e v_6, respectivamente. Por exemplo, $\{\{a, q\}, \{j, i\}\}$, $\{\{m, n\}\}$ e $\{\{g, d\}\}$ são emparelhamentos de cardinalidade máxima em $G\{v_4\}$, $G\{v_5\}$ e $G\{v_6\}$ que não saturam v_4, v_5 e v_6, respectivamente.

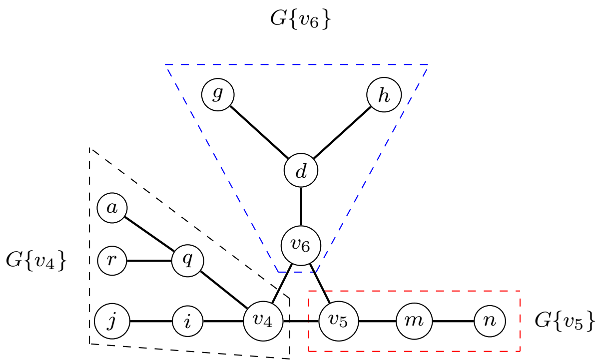


Figura 4: Grafo unicíclico do tipo II.

Os próximos dois resultados são nossas primeiras contribuições, onde mostramos que para verificar se um grafo unicíclico é do tipo I ou II basta averiguarmos se o vértice de intersecção da árvore pendente com o ciclo do grafo unicíclico está ou não no suporte desta árvore pendente.

Teorema 4.2. *Um grafo G unicíclico é do tipo I se e somente se existir pelo menos uma árvore $G\{v\}$ pendente de G tal que $v \notin Supp(G\{v\})$.*

Demonstração. Como G é do tipo I sabemos que existe um vértice v no ciclo de G tal que v é sempre saturado por qualquer emparelhamento máximo em $G\{v\}$. Além disso, pelo Teorema 3.1 segue que um vértice w na árvore $G\{v\}$ é saturado por qualquer emparelhamento máximo se e somente se $w \notin Supp(G\{v\})$. Em particular, o vértice v obrigatoriamente não está no suporte de $G\{v\}$. $\square$

Corolário 4.1. *Um grafo G unicíclico é do tipo II se e somente se toda árvore $G\{v\}$ pendente de G é tal que $v \in Supp(G\{v\})$.*

Demonstração. Segue direto do Teorema 4.2. $\square$

O Teorema 4.3 usamos para demonstrar os Teoremas 4.4 e 4.5.

Teorema 4.3. *[2] Seja G um grafo unicíclico e C o ciclo de G. Se G é do tipo I e $v \in V(C)$ um vértice saturado por qualquer emparelhamento máximo em $G\{v\}$, então*

$$\eta(G) = \eta(G\{v\}) + \eta(G - G\{v\}).$$

Se G é do tipo II então $\eta(G) = \eta(G - C) + \eta(C)$.

Os dois próximos Teoremas 4.4 e 4.5 são nossas contribuições onde obtemos uma caracterização para grafos unicíclicos não singulares do tipo I e II através do suporte de suas árvores pendentes.

Teorema 4.4. *Seja G um grafo unicíclico com pelo menos uma árvore $G\{v\}$ pendente de G tal que $v \notin Supp(G\{v\})$. O grafo G é não singular se e somente se as árvores $G\{v\}$ e $G - G\{v\}$ têm emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Como existe uma árvore $G\{v\}$ pendente de G tal que $v \notin Supp(G\{v\})$, concluímos pelo Teorema 4.2 que G é do tipo I. Logo pelo Teorema 4.3 sabemos que G terá nulidade nula se somente se $G\{v\}$ e $G - G\{v\}$ tiverem nulidade nula também, e segue do Teorema 2.1 que isso acontece se e somente se as árvores $G\{v\}$ e $G - G\{v\}$ tiverem emparelhamento perfeito. $\square$

Teorema 4.5. *Seja G um grafo unicíclico com toda árvore $G\{v\}$ pendente de G é tal que $v \in Supp(G\{v\})$. O grafo G é não singular se e somente se as árvores que compõem a floresta $G - C$ tiverem emparelhamento perfeito e o ciclo C tiver comprimento diferente de um múltiplo de 4.*

Demonstração. De fato, como toda árvore $G\{v\}$ pendente de G é tal que $v \in Supp(G\{v\})$ concluímos pelo Corolário 4.1 que G é do tipo II. Logo pelo Teorema 4.3 sabemos que G terá nulidade nula se somente se $G - C$ e C tiverem nulidade nula também, e segue dos Teoremas 2.1 e 4.1 que isso acontece se e somente se as árvores que compõem a floresta $G - C$ tiverem emparelhamento perfeito e o ciclo C tiver comprimento diferente de um múltiplo de 4. $\square$

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

5 Grafos unicíclicos singulares

Nesta seção exibiremos duas de nossas contribuições sobre grafos unicíclicos singulares.

O Corolário 5.1 é uma caracterização dos grafos unicíclicos singulares através do suporte de suas árvores pendentes.

Corolário 5.1. *Seja G um grafo unicíclico. Considere C o ciclo de G. O grafo G é singular se e somente se uma das quatro condições abaixo acontecer:*

(i) *Existe uma árvore pendente $G\{v\}$, com $v \notin Supp(G\{v\})$, que não tem emparelhamento perfeito;*

(ii) *Existe uma árvore pendente $G\{v\}$, com $v \notin Supp(G\{v\})$, tal que $G - G\{v\}$ não tem emparelhamento perfeito;*

(iii) *Toda árvore $G\{v\}$ pendente de G é tal que $v \in Supp(G\{v\})$ e pelo menos uma das árvores que compõem a floresta $G - C$ não tiver emparelhamento perfeito;*

(iv) *Toda árvore $G\{v\}$ pendente de G é tal que $v \in Supp(G\{v\})$ e o ciclo C tiver comprimento igual a um múltiplo de 4.*

Demonstração. Segue direto dos Teoremas 4.4 e 4.5. □

O Teorema 5.1 exibe uma forma de obter parte do suporte de um grafo unicíclico do tipo I através do suporte de algumas de suas árvores pendentes.

Teorema 5.1. *Seja G um grafo unicíclico. Seja uma árvore pendente $G\{v\}$ tal que $v \notin Supp(G\{v\})$. Então $Supp(G\{v\}) \subseteq Supp(G)$.*

Demonstração. Dado um vértice $u \in Supp(G\{v_i\})$, temos que existe um vetor $x \in \mathcal{N}(G\{v_i\})$, com $x_u \neq 0$. Defina o vetor w da seguinte forma:

1- Para cada $v \in V(G) - V(G\{v_i\})$, $w_v = 0$;

2- Para cada $v \in V(G\{v_i\}))$, $w_v = x_v$.

Note que a matriz de adjacência de G tem o seguinte aspecto:

$$A(G) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} V(G\{v_1\}) & \dots & V(G\{v_{i-1}\}) & V(G\{v_i\}) & V(G\{v_{i+1}\}) & \dots & V(G\{v_k\}) \end{array} \\ \begin{array}{c} V(G\{v_1\}) \\ \vdots \\ V(G\{v_{i-1}\}) \\ V(G\{v_i\}) \\ V(G\{v_{i+1}\}) \\ \vdots \\ V(G\{v_k\}) \end{array} & \begin{bmatrix} A(G\{v_1\}) & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & C \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0}^t & \cdots & A(G\{v_{i-1}\}) & M & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & \cdots & M^t & A(G\{v_i\}) & B & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & \cdots & \mathbf{0}^t & B^t & A(G\{v_{i+1}\}) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C^t & \cdots & \mathbf{0}^t & \mathbf{0}^t & \mathbf{0}^t & \cdots & A(G\{v_k\}) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Onde M, B e C são submatrizes com quase todas entradas nulas, com exceção das entradas correspondentes as adjacências entre v_{i-1} e v_i, v_i e v_{i+1}, v_1 e v_k, respectivamente.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0438

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Observe que $w \in \mathcal{N}(G)$. De fato, como $v_i \notin Supp(G\{v_i\})$ temos que $x_{v_i} = 0$. Logo temos que

$$A(G)w = \begin{bmatrix} 0 \\ Mx \\ A(G\{v_i\})x \\ B^t.x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{v_i}.1 \\ A(G\{v_i\})x \\ x_{v_i}.1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Como $w_u = x_u \neq 0$ concluímos que $u \in Supp(G)$, como queríamos mostrar.

□

Considere G o grafo unicíclico da Figura 3. Note que temos $Supp(G\{v_1\}) = \{a, r\}$ e $Supp(G\{v_2\}) = \{o, p\}$ logo pelo Teorema 5.1 podemos concluir que $\{a, r, o, p\} \subseteq Supp(G)$.

6 Conclusões

Pretendemos avançar nossos estudos sobre o suporte de grafos unicíclicos, pois acreditamos que suporte nos dá características importantes sobre os grafos unicíclicos. Por exemplo, nossos experimentos indicam que o suporte forma um conjunto independente de vértices em algumas classes de grafos unicíclicos. Além disso, almejamos obter uma fórmula para o número de independência e o número de emparelhamento para grafos unicíclicos dentro desta classe, algo semelhante a fórmula obtida pelos autores de [3].

Referências

[1] R. B. Bapat. Graph and Matrices. In *Universitext.* SBMAC- Springer, 2010. ISBN: 978-1-84882-980-0.

[2] S. Gong, Y. Fan and Z. Yin. On the nullity os graphs with pendant trees. *Linear Algebra and its Applications*, 433:1374-1380, 2010.

[3] D. A. Jaume and G. Molina. Null Decomposition of Trees. Submitted.

[4] M. Nath and B. K. Sarma. On the null-spaces of acyclic and unicyclic singular graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 427:42-54, 2007.

[5] S. Sookyang, S. Arworn and P. Wojtylak. Characterizations of Non-Singular Cycles, Path and Trees. *Thai Journal of Mathematics*, 6:331-336, 2008.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0438