Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise do Impacto Ambiental de cultivos transgênicos com ruído ambiental

Rinaldo Vieira da Silva Júnior[1]
Núcleo de Ciências Exatas-NCEx, UFAL, Arapiraca, AL

Resumo. Um modelo para o impacto ambiental de cultivos transgênicos em cultivos naturais é apresentado. Resultados anteriores utilizaram equações determinísticas para contemplar perturbações externas. A trofodinâmica analítica com mecanismos de dispersão de difusão espacial é ampliada com ruído finsleriano.

Palavras-chave. Volterra-Hamilton systems; Finsler noise; Diffusion; Transgenic plants.

1 Introdução

Em artigo anterior [7] estudamos o impacto de uma cultura variante geneticamente modificada em sua cultura natural, usando coordenadas de crescimento líquido para o espaço de produção, [2]. Algumas suposições na construção do modelo são admitidas, como a área plantada é pequena e a dispersão de sementes é intensa, de modo que os cultivos são totalmente misturadas antes da germinação, [9], [12]. No presente artigo, o modelo anterior é estendido para incorporar a adição de ruído às equações determinísticas de Volterra-Hamilton, uma certa classe de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem [1,4,5,10]. Além disso, é agora assumido que a competição entre as duas variantes é permitida para persistir a fim de modelar os desenvolvedores do cultivo GM tendo o cuidado de fazer ajustes genéticos que não elimine com a safra normal. Esta é a competição Gausse-Witt, mas é o caso especial quando existe um equilíbrio estável, [2]. Finalmente, introduzimos a terminologia "potencial de produção" no modelo. Aplicando a teoria do ruído finsleriano num problema sobre a competição entre um cultivo e sua versão modificada, usamos a teoria dos espaços de Wagner para analisar os efeitos da adição do ruído.

2 Terminologia Matemática

Seja M^n uma variedade diferenciável coenxa sem bordo. Uma conexão Finsler é uma conexão linear D em TM, o fibrado tangente em M^n com a seção nula retirada, a qual preserva sobre a ação de D a decomposição da soma de Whitney $TTM = HIM \oplus VTM$

[1]rinaldo.junior@arapiraca.ufal.br

das distribuições horizontal e vertical. Definimos a derivada covariante de um campo vetorial em M^n com componentes locais X^i por

$$\nabla X^i = \partial_j X^i \; y^j + \mathrm{N}^i_j \; X^j \tag{1}$$

com (x^i, y^i) coordenadas locais em TM. A notação no somatório com índices superiores e inferiores repetidos é utilizada no decorrer deste trabalho. Utilizamos, $\partial_j = \partial/\partial x^j$ no decorrer deste trabalho. As n^2 funções N^i_j transformam através da transformação não-singular $(x^i) \longmapsto (\bar{x}^i)$ como $\gamma^i_{jk}(x)y^k$, com γ a conexão Riemanniana clássica de Levi-Civita e são chamados coeficientes locais da conexão não-linear, [10].

Definimos uma base de Berwald como o conjunto de todos os campos de vetores em TM^n por

$$\{\delta_i, \dot{\partial}_i\}, \qquad \delta_i = \partial_i - \mathrm{N}^j_i(x,y) \; \dot{\partial}_j, \qquad \dot{\partial}_j = \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{2}$$

Usando esta base podemos definir os coeficientes locais da conexão Finsler D como segue

$$\begin{aligned} D_{\delta_i}\delta_j &= F^k_{ji}(x,y) \; \delta_k, \quad D_{\delta_i}\dot{\partial}_j = F^k_{ji}(x,y) \; \dot{\partial}_k \\ D_{\dot{\partial}_j}\delta_j &= C^k_{ji}(x,y) \; \delta_k, \quad D_{\dot{\partial}_j}\dot{\partial}_j = C^k_{ji}(x,y) \; \dot{\partial}_k \end{aligned} \tag{3}$$

Para uma métrica Finsler $F(x,y)$ em M, temos que $C_{ijk} = g_{il}C^l_{jk}$, com $F(x,y)$ conhecida como função métrica Finsler e $C_{ijk} = \frac{1}{2}\dot{\partial}_k \; g_{ij}$. Se colocarmos $\tilde{F} = F^2/2$ então $g_{ij}(x,y) = \dot{\partial}_i\dot{\partial}_j\tilde{F}$ é conhecida comom tensor métrico fundamental $g = (g_{ij})$ da variedade Finsler $(M^n, \tilde{F})$.

3 Geometria Finsler Estocástica

Nesta seção seguiremos a teoria de Volterra-Hamilton com coordenadas locais em M^n denotadas por x^i enquanto aquelas em TM_p serão denotadas por C^i. A dinâmica determinística GM versus NC com C^i denotando a média espacial sobre as plantações N^i, veja [7], [9], [12],

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{C}^1 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{C}^2 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{dC}^1}{\mathrm{d}t} &= \lambda\mathrm{C}^1 - (\lambda\alpha_1 + \beta_1)(\mathrm{C}^1)^2 - \beta_2 \; \mathrm{C}^1 \; \mathrm{C}^2 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{dC}^2}{\mathrm{d}t} &= \lambda\mathrm{C}^2 - (\lambda\alpha_2 + \beta_2)(\mathrm{C}^2)^2 - \beta_1 \; \mathrm{C}^1 \; \mathrm{C}^2 \end{cases} \tag{4}$$

com C^1 e C^2 denotando as plantações GM e natural, respectivamente. A função métrica intrínseca ao sistema (4) após usar $\mathrm{d}s = \exp\,(\lambda t)\ \mathrm{d}t$ é dada por

$$F(x, \mathrm{C}) = \mathrm{e}^{Q(x)} L(\mathrm{C}) \tag{5}$$

com $Q(x) = Q(x) = -(\alpha_1 + \beta_1)(x^1) + [(1+\lambda)\alpha_2 + \beta_2]x^2$ e $L(C) = \dfrac{(\mathrm{d}x^2/ds)^{1+1/\lambda}}{(\mathrm{d}x^1/\mathrm{d}s)^{1/\lambda}}$.

Neste contexto, introduzimos o conceito de potencial de produção, $Q(x)$. O valor deste polinômio ao longo da trajetória média da difusão em TM com o levantamento de Sasaki do tensor métrica Riemanniana, auxiliará a determinar os efeitos do ruído na competição. O parâmetro de produção total, s, como uma medida intrínseca é semelhante ao "tamanho", através da mudança de parâmetro $\mathrm{d}s = \exp(\lambda t)\ \mathrm{d}t$, [2–4]. O custo de produção $F(x, \mathrm{C})$ será transformado através de uma mudança de parâmetro de t para s usando, $\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{\lambda t}\ \mathrm{d}t$. Adicionamos os efeitos de ruído pertubando as equações da dinâmica determinística (4) da forma

$$\begin{cases} \mathrm{d}x^1 &=& \mathrm{C}^1\ \mathrm{d}t + \mathrm{d}u^1 \\ \\ \mathrm{d}x^2 &=& \mathrm{C}^2\ \mathrm{d}t + \mathrm{d}u^2 \\ \\ \mathrm{dC}^1 &=& \lambda \mathrm{C}^1\ \mathrm{d}t - (\lambda\alpha_1 + \beta_1)(\mathrm{C}^1)^2\ \mathrm{d}t - \beta_2\ \mathrm{C}^1\ \mathrm{C}^2\ \mathrm{d}t + a\ \mathrm{d}v^1 \\ \\ \mathrm{dC}^2 &=& \lambda \mathrm{C}^2\ \mathrm{d}t - (\lambda\alpha_2 + \beta_2)(\mathrm{C}^2)^2\ \mathrm{d}t - \beta_1\ \mathrm{C}^1\ \mathrm{C}^2\ \mathrm{d}t + a\ \mathrm{d}v^2, \end{cases} \tag{6}$$

onde $a > 0$ é constante, e u, v são pertubações independentes. Tomando dois movimentos Brownianos canônicos $v^1(s)$ e $v^2(s)$ em $\mathbb{R}^n$, $n-$espaço euclidiano, perturbando as biomassas $x^i(s)$ e densidades populacionais $y^i(s)$, respectivamente. Assumimos que este ruído externo não é afetado pelo comportamento do sistema de Volterra-Hamilton, [1], [4]. Ainda, a resposta $\mathrm{d}x^i(s), \mathrm{d}y^i(s)$ a estas perturbações será, em geral, não dependendo somente da magnitude mas das direções de $\mathrm{d}v^i(s), \mathrm{d}w^i(s)$, mas também do estado $x^i(s), y^i(s)$ do sistema. Uma escolha natural, veja [8], é que v seja um movimento Browniano canônico em $\mathbb{R}^2$. Tal perturbação $\mathrm{d}v^i$ adicionada aos lados direitos das equações da população, as duas últimas equações em (6), não é somente consistente com a métrica, mas também segue os procedimentos canônicos na ecologia matemática. Além disso, as perturbações $\mathrm{d}u^i$ possuem a forma $\mathrm{d}u^i = F^i_j(x) \circ \mathrm{d}w^j$, onde w é o movimento Browniano canônico em $\mathbb{R}^2$. A notação circular indica que o cálculo estocástico de Stratonovich é utilizado. De acordo com o AZ ansatz da teoria da difusão Finsleriana o termo de ruído $\mathrm{d}u^i$ deve ser da forma $\mathrm{d}u^i = \mathrm{e}^{-\phi(x)} \circ \mathrm{d}w^i$. O sistema (6) tem u dado acima e v, w são movimentos Brownianos independentes em $\mathbb{R}^2$. Observamos que a perturbação u está relacionada a *conexão de Wagner* em M com coeficientes $\bar{F}^i_{jk} = \phi_j \delta^i_k$, com $\phi_j = \dfrac{\partial \phi}{\partial x^j}$. Os coeficientes da conexão Wagner $(\mathrm{N}^j_i, F^i_{jk}, \mathrm{C}^i_{jk})$

$$\mathrm{N}^j_i = Q_j\ y^i, \qquad T^i_{jk} = Q_j\ \delta^i_k - Q_k\ \delta^i_j, \qquad \mathrm{C}^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}\ \dot{\partial}_l\ g_{jk} \tag{7}$$

são os coeficientes não-linear, horizontal, e vertical, respectivamente. Ao longo de uma solução dada $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ pertubamos a curva $\alpha(t)$ por dois movimentos Brownianos independentes w e v em $\mathbb{R}^2$, os quais representam as perturbações ambientais e então rolling a curva perturbada $\beta(t) = (\mu(t) + w(t), \nu(t) + v(t))$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ de volta TM obtemos a difusão resultante $(x(t), y(t))$ em TM definida pelo sistema

$$\begin{cases} \mathrm{d}x^i := y^i \ \mathrm{d}s + z^i_j \circ \mathrm{d}\mu^j \\ \\ \delta y^i := z^i_j \circ \mathrm{d}\nu^j + g^{ij} \ T^l_{jk} \ g_{lm} \ y^k \ y^m \ \mathrm{d}s \\ \\ \mathrm{d}z^i_j := -F^i_{kl} \ z^l_j \circ \mathrm{d}x^k - \mathrm{C}^i_{kl} \ z^l_j \circ \delta y^k \end{cases} \tag{8}$$

Uma métrica natural G em TM é obtida pelo levantamento de Sasaki do tensor métrico $g(x, y)$. É necessário estabelecer os coeficientes da conexão de Wagner. Estes coeficientes são necessários para estabelecer uma expressão para o campo vetorial drift em tal difusão.

Seguindo os resultados do teorema do mergulho Riemanniano para uma $hv-$difusão, [8], que a difusão (x, y) definida por (8) pode ser considerada como movimento Browniano em TM mais um certo drift B que é um campo vetorial em TM. O drift B da difusão (X, Y) na variedade Riemanniana (TM, G) é dada por

$$B = \frac{1}{2} \ g^{ik} \ P^j_{jk} \ \delta_i - \frac{1}{2} \ g^{ik} \ \mathrm{C}^j_{kj} \ \dot{\partial}_i \tag{9}$$

No caso em que o espaço de Finsler é do tipo de Berwald, temos o tensor de torção $P^i_{jk} = 0 = P_{ijk}$ e T^i_{jk} satisfazendo a relação $T^{(j)}_{(j)(k)} = 0 = T^j_{j(k)} = T^{(j)}_{(j)k}$ para a conexão de Wagner, [1]. O campo vetorial drift B assume a forma

$$B = \frac{1}{2} \ g^{ik} \ T^j_{jk} \ \delta_i - \frac{1}{2} \ g^{ik} \ \mathrm{C}^j_{kj} \ \dot{\partial}_i. \tag{10}$$

onde os índices repetidos nos coeficientes das expressões T^j_{jk} e C^j_{kj}. Os coeficientes de torção T^j_{jk} e C^j_{kj} expressos em termos do potencial de produção $Q(x)$ numa base $\{\delta_i, \dot{\partial}_i\}$, com $Q_k = \dfrac{\partial Q}{\partial x^k}$, tomam a seguinte forma $T^j_{jk} = -(n-1) \ Q_k$. Para calcular os coeficientes C^j_{kj} recorremos a relação com os escalar principal I no espaço Finsler (M, F) com base de Berwald $\{l_i, m_i\}$, $\mathrm{C}^j_{kj} = \dfrac{I}{F} \ m_k$.

4 Ruído Finsleriano para o modelo GM

Usando o mergulho da difusão Finsleriana na Riemanniana com drift via métrica Sasaki G na base de Berwald $\{\delta_i, \dot{\partial}_i\}$, obtemos o gerador diferencial

$$D = \frac{\epsilon^2}{2} \ \Delta_G + \frac{\epsilon}{2} \ g^{ik} \ T^j_{jk} \ \delta_i - \frac{\epsilon}{2} \ g^{ik} \ C^j_{kj} \ \dot{\partial}_i + y^i \ \delta_i \tag{11}$$

obtendo as equações da dinâmica das médias, fazendo ϵ^2 próximo de zero e eliminando ϵ no campo vetorial drift composto por T e C acima, ou seja, $\dfrac{dx}{ds} = f^i(x)$ com $i = 1, 2$. A difusão de Markov (x, y) correspondente as perturbações nas equações dos sistemas acima relaciona a densidade de probabilidade $p(x, y, \tau)$ com as soluções das EDE's satisfaz a equação backward de Kolmogorov, isto é

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{2}\ \Delta_G\ p + \frac{1}{2}\ g^{ik}\ T^j_{jk}\ \delta_i\ p - \frac{1}{2}\ g^{ik}\ C^j_{kj}\ \dot{\partial}_i\ p + y^i\ \delta_i\ p \tag{12}$$

com G representando a métrica Riemanniana chamada levantamento de Sasaki para o fibrado tangente cortado TM de acordo com a matriz $g \oplus g = G$. Pela base de Berwald $\{\delta_i, \dot{\partial}_i\}$, as equações médias, da expressão do campo vetorial drift B da equação (12) acima são

$$\begin{cases} \dfrac{\delta x^i}{\delta s} &= -\dfrac{1}{2}\ Q_k\ g^{ik} + y^i \\ \dfrac{\delta y^i}{\delta s} &= -\dfrac{1}{2}\ \dfrac{I}{F}\ g^{ik}\ m_k \end{cases} \tag{13}$$

com $\delta_i x^i = \partial_i x^i - G^r_i\ \dot{\partial}_r\ (x^i)$. Como o espaço Finsler é localmente Minkowski (M^n, F), existem coordenadas x de forma que $F = F(y)$, ou seja, os coeficientes G são nulos e assim obtemos $\dfrac{\delta x^i}{\delta t} = \dfrac{\partial x^i}{\partial t}$ e as equações da dinâmica (13) tomam a seguinte forma

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} &= -\dfrac{1}{2}\ Q_k\ g^{ik} + y^i \\ \dfrac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s} &= -\dfrac{1}{2}\ \dfrac{I}{F}\ m^i. \end{cases} \tag{14}$$

Definição 4.1. *O vetor unitário m^i normal ao vetor vetor unitário l^i na direção do elemento de suporte $\dot{x}^i$ é definido pelas matrizes*

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{g} \\ -\sqrt{g} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{g}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{g}} & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

com $g = \det(g_{ij})$. O vetor m^i é expresso por

$$l^i = \varepsilon^{ik}\ m_k, \quad l_i = \varepsilon_{ik}\ m^k. \tag{16}$$

Precisamos calcular os coeficientes do spray para escrever as equações da dinâmica das médias (14) em termos da métrica de Wagner. Temos $2\mathrm{G}^1 = -\lambda Q_1 (y^1)^2$ and $2\mathrm{G}^2 = \dfrac{\lambda}{\lambda+1} Q_2 (y^2)^2$ e assim $m^1 = -\dfrac{l_2}{\sqrt{g}}$ and $m^2 = \dfrac{l_1}{\sqrt{g}}$ onde $l_i = \dot{\partial}_i\ \bar{F}$, com $\bar{F} = \mathrm{e}^Q\ \dfrac{(y^2)^{1+1/\lambda}}{(y^1)^{1/\lambda}}$. Para fazer isso, usamos as relações (15) acima, de acordo com [6]

$$\begin{aligned} \dot{\partial}_2 F\ (\varepsilon^{12}) &= \frac{1}{\sqrt{g}}\ \dot{\partial}_2 F &= -m^1 &= \sqrt{\lambda+1}\left(\frac{y^1}{y^2}\right)^{1+1/\lambda} \mathrm{e}^{-Q} \\ \dot{\partial}_1 F\ (-\varepsilon^{21}) &= \frac{1}{\sqrt{g}}\ \dot{\partial}_1 F &= m^2 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}\ \mathrm{e}^{-Q}\left(\frac{y^1}{y^2}\right)^{1/\lambda} \end{aligned} \tag{17}$$

com $\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$, os quais tomam a seguinte forma,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} & = & -\dfrac{1}{2}\, g^{ik}\, Q_k, \text{ para } i = 1, 2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}s} & = & -\dfrac{1}{2}\, \dfrac{I}{F}\, m^1 \\ \dfrac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}s} & = & -\dfrac{1}{2}\, \dfrac{I}{F}\, m^2 \end{cases} \tag{18}$$

com função métrica Finsler dada por (5).

5 Conclusões

Calculamos a influência do ruído ambiental obtido do sistema calculamos (18) e obtemos um significado biologicamente relevante para o modelo matemático proposto. Ao longo de uma trajetória média da difusão (4) as equações de primeira ordem numa base de Berwald (13) satisfazem

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\, g^{ij}\, Q_i\, Q_j < 0, \tag{19}$$

usando (18). Como a matriz g^{ij} é positiva definida, precisamos o lado direito da equação (19) é negativo, isto é, o potencial de produção de Q está diminuindo, isto é, está diminuindo em média. Isso faz sentido para o modelo matemático porque estamos lidando com espécies em competição, o que reforça o resultado essencial, prevalece que a produção da variante natural diminui da competição com a variante geneticamente modificada.

Analisamos o sistema de equações da dinâmica média obtida do gerador diferencial da $hv-$difusão Finsler o qual contém quatro equações (14). Tomando a razão dos termos $\dfrac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}$ na segunda equação do sistema (18), temos

$$\ln \mathbb{E}(\mathrm{C}^2)(t) = \frac{1}{\lambda + 1} \ln \mathbb{E}(\mathrm{C}^1)(t) + C, \tag{20}$$

onde C representa uma constante de integração. Conforme o exposto acima, vemos que para qualquer tempo t, a média da plantação normal, o tipo #2 é muito menor do que a média do cultivo transgênico, tipo #1. Se a taxa de crescimento λ for igual a 1, obtemos que $\mathbb{E}(\mathrm{C}^2)$ é a raiz quadrada de $\mathbb{E}(\mathrm{C}^1)$. Por exemplo, se uma empresa adota o tipo de cultura, isto é, o cultivo geneticamente modificado, com uma taxa de crescimento $\lambda = 4$, o tipo #2 cultivo natural está produzindo apenas a raiz quinta do que a geneticamente modificada #1 está produzindo, e isso é muito pequeno. Devemos observar o forte contraste na razão de equilíbrio das médias espaciais.

Agradecimentos

O autor agradece a P.L. Antonelli e S.F. Rutz pela atenção no decorrer deste trabalho.

Referências

[1] P.L. Antonelli, *Handbook of Finsler Geometry*, Vols. 1, 2, Springer-Verlag, Dordrecht (2003).

[2] P.L. Antonelli, R.H. Bradbury, *Volterra-Hamilton Models in Ecology and Evolution of Colonial Organisms*, World Scientific, Singapore (1996).

[3] P.L. Antonelli, C.G. Leandro, S.F. Rutz, Phenotypic deformations: the role of allometry and the golden ratio, (in press).

[4] P.L. Antonelli, R.S. Ingarden, M. Matsumoto, *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, Springer-Verlag (1993).

[5] P.L. Antonelli, S.F. Rutz, Geometric approach to the dynamics of succession in plant communities, In: *Proc. do III Simpósio de Bio. Mat. e Comp.*, e-papers, (2004), 218-223.

[6] P.L. Antonelli, K.T. Fonseca, S.F. Rutz, The mathematical theory of endosymbiosis, 11: models of the fungal fusion hypothesis, *Nonlinear analysis: Real World Appl.*, **13**, (2012), 2096-2103.

[7] P.L. Antonelli, R.V.S. Junior, S.F. Rutz, Environmental Analysis of Impact of Transgenic Crops, *Int. J. of Appl. Math.*, Academic Publications Ltd., **26**, No 4 (2013), 515-524.

[8] P.L. Antonelli, T.J. Zastawniak, *Fundamentals of Finslerian Diffusion with Applications*, Springer-Verlag, London (1999).

[9] C. Conway, D. Hoff, J. Smoller, Large Time Behavior of Solutions of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations, *SIAM J. Appl. Math.*, **35**, No 1 (1978), 1-16.

[10] D. Laugwitz, *Differential and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York and London (1965).

[11] H. Rund, *The differential geometry of Finsler spaces*, Springer Science & Business Media (2012).

[12] J. Smoller, *Shock Waves and Diffusion–Reaction Equations*, Springer-Verlag,, New York, Heidelberg, Berlin, 581 pp (1983).

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0319